

Katastrophentheoretische
Ansätze in den
Wirtschaftswissenschaften:
Darstellung und Kritik

Dissertation

vorgelegt dem
Fachbereich Rechts- und
Wirtschaftswissenschaften
der Johannes Gutenberg
Universität in Mainz

zur Erlangung des Grades
eines Doktors der Staats-
wissenschaften (Dr. rer. pol.)

von

Bernd-Dieter Wleth

1979



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41552619_0070

Katastrophentheoretische
Ansätze in den
Wirtschaftswissenschaften:
Darstellung und Kritik

Dissertation

vorgelegt dem
Fachbereich Rechts- und
Wirtschaftswissenschaften
der Johannes Gutenberg
Universität in Mainz

zur Erlangung des Grades
eines Doktors der Staats-
wissenschaften (Dr.rer.pol.)

von

Bernd-Dieter Wieth



Erstberichterstatter: Prof. Dr. Heinz Stöwe
Zweitberichterstatter: Prof. Dr. Gerhard Laven
Tag der mündlichen Prüfung: 19. Juni 1979

Inhaltsübersicht

(1)	Vorbemerkungen	1
(2)	Einführung in die Katastrophentheorie	2
(3)	Mathematische Grundlagen der Katastrophentheorie	17
(31)	Einige Theoreme der Singularitäten- theorie	18
(32)	Wesen der Katastrophentheorie	36
(33)	Thoms Klassifikationstheorem	38
(34)	Das dynamische Verhalten	47
(4)	Anwendungen der Katastrophentheorie in den Sozialwissenschaften - Ein Überblick -	51
(41)	Modelle der Kuspenskatastrophe	52
(42)	Modelle der Schmetterlings- katastrophe	56
(5)	Anwendungen in den Wirtschaftswissen- schaften	59
(51)	Die Bedeutung qualitativer Aussagen	63
(52)	Verhaltensannahmen in den Wirtschaftswissenschaften	66
(521)	Implikationen bei katastrophentheoretisch formulierten Ver- haltensannahmen	68
(522)	Katastrophentheoretische Modelle individuellen Nach- frageverhaltens	72
(523)	Katastrophentheoretische Modelle zum Verhandlungs- prozeß der Lohnfindung	94

(524) Makroökonomische Verhaltens- hypothesen und Katastrophen- theorie	99
(53) Stabilitätsbetrachtungen in komperativ-statischen Modellen	101
(6) Kritische Würdigung	112
(7) Zusammenfassung	122
Literaturverzeichnis	124

(1) Vorbemerkungen

Die Wirtschaftstheorie greift zur Darstellung ökonomischer Phänomene oft auf mathematische Methoden zurück. Durch diese strenge Formalisierung konnten häufig Einsichten in komplexe Strukturzusammenhänge gewonnen werden, die durch rein verbale Beschreibungen und Ableitungen nur sehr unständig oder überhaupt nicht gewonnen werden können. Man denke an die "Mathematisierung" der Keynes'schen Theorie, an Wachstumsmodelle und dergleichen. Ausgangspunkt waren dabei immer wirtschaftliche Tatbestände und Überlegungen, die in eine mathematische Form überführt wurden.

Viele wirtschaftliche Phänomene entwickeln sich (leider ?) nicht in so kontinuierlicher Form, wie es für viele mathematische Methoden notwendig wäre. Vielmehr zeigt das wirtschaftliche Verhalten von Individuen oft plötzliche Veränderungen. Solche abrupten Verhaltensänderungen finden sich etwa bei spekulativen Prozessen, bei bestimmten Konstellationen der Nachfragedeterminanten und bei Verhandlungsprozessen.

Solche plötzlichen Veränderungen der Verhaltensweisen werden von der Katastrophentheorie formal präzisiert.

Die Katastrophentheorie ist eine relativ junge Disziplin, die dort angewandt wird, wo "Sprünge" wesentliche Bestandteile von Verhaltensmustern sind. Zur Erklärung realer Phänomene anderer Wissenschaftsgebiete ist die Katastrophentheorie bereits eingesetzt worden. Wir wollen im folgenden untersuchen, ob für die wirtschaftlichen Tatbestände, bei denen wir Diskontinuitäten im wirtschaftlichen Verhalten beobachten können,

die Anwendung der Katastrophentheorie zu wesentlichen Einsichten in das Wesen der Phänomene führen kann.

Zur Einführung betrachten wir ein einfaches katastrophentheoretisches Modell eines Börsenmarktes, das versucht, plötzliche Kursänderungen an einer Börse zu formalisieren. Nach einer Erläuterung der mathematischen Grundlagen der Katastrophentheorie geben wir einen kurzen Überblick über einige Anwendungen in den Sozialwissenschaften. Diese, in der Literatur diskutierten Ansätze, sollen vor allem die vielfältigen Möglichkeiten allein in den Sozialwissenschaften darstellen, welche die Katastrophentheorie zu eröffnen vermag.

Anschließend untersuchen wir, ob die Implikationen der Katastrophentheorie mit den beobachtbaren, wirtschaftlichen Phänomenen vereinbar sind und formulieren für mikroökonomische Anwendungen einige Modelle. Abschließend würdigen wir die Anwendungen kritisch und untersuchen, ob die mathematischen Methoden richtig angewandt wurden. Die dort diskutierten Bedenken erlauben schließlich nicht, die Katastrophentheorie als eine Darstellungsweise zu nutzen, welche durch einen strengen Formalismus wissenschaftliche Einsichten begünstigt, die auf andere Weise nicht oder nur sehr umständlich erzielt werden können.

Dennoch sollten die Wirtschaftswissenschaften nicht darauf verzichten, neue Darstellungsweisen auf die Brauchbarkeit innerhalb ihrer Disziplin zu untersuchen. Mit dieser Zielsetzung haben wir auch die Anwendung der Katastrophentheorie für wirtschaftliche Phänomene analysiert.

(2) Einführung in die Katastrophentheorie

Um die zeitliche Entwicklung realer Phänomene zu beschreiben, werden häufig gewöhnliche Differentialgleichungen resp. Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen verwendet. Diese auch in den Wirtschaftswissenschaften verwendete Methode¹⁾ hat aber gewisse Beschränkungen: die klassischen mathematischen Voraussetzungen für die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung implizieren, daß diese Lösung eine differenzierbare Funktion ist. Allerdings gibt es in der Realität auch Phänomene, die durch plötzliche Veränderungen und unvorhersehbare Divergenzen gekennzeichnet sind. Ein solches Verhalten kann nicht mehr mit differenzierbaren Funktionen beschrieben werden.²⁾

Vor kurzem wurde eine mathematische Methode entwickelt, die zur Beschreibung von diskontinuierlichen und divergenten Phänomenen geeignet ist. "Die Methode ermöglicht, die Evolution von Formen in allen Aspekten der Natur zu beschreiben, und verkörpert daher eine sehr allgemeine Theorie; die Methode kann mit besonderer Effektivität dort angewandt werden, wo kontinuierliche Kräfte- oder Motivationsveränderungen zu

1) Vgl. auch die neueren, nicht linearen Ansätze, etwa bei Bergstrom, Wymer, A Model of Disequilibrium Neoclassical Growth and its Application to the United Kingdom, in: Bergstrom (ed.), Statistical Inference in Continuous Time Economic Models, Amsterdam, Oxford 1976, S. 267 - 327.

2) Vgl. Zeeman, Catastrophe Theory, in: Scientific American 243 (1976), S. 65 - 83, S. 65.

plötzlichen Veränderungen im Verhalten führen. Aus diesem Grund hat man diese Methode Katastrophentheorie genannt. ...

Die Theorie ist abgeleitet von der Topologie, das ist der Zweig der Mathematik, der sich unter anderem mit Eigenschaften von vieldimensionalen Oberflächen befaßt. Die Topologie wurde einbezogen, weil die der Natur unterliegenden Kräfte durch glatte Gleichgewichtsoberflächen beschrieben werden können; wenn das Gleichgewicht zusammenbricht, tritt die Katastrophe ein. Das Problem für die Katastrophentheorie ist daher die Beschreibung der Gestalten aller möglichen Gleichgewichtsoberflächen. Thom hat dieses Problem gelöst durch wenige archetypische Formen, die er Elementarkatastrophen nennt." ¹⁾

Zum Verständnis katastrophentheoretischer Modelle wollen wir diese zunächst an einem Beispiel illustrieren. Wir wählen zur Einführung die erste in der Literatur diskutierte ökonomische Anwendung der Katastrophentheorie, nämlich ein Modell des instabilen Marktverhaltens an einer Effektenbörse. ²⁾

Es handelt sich hier um ein partialanalytisches Modell für den Wertpapiermarkt, das die Überschußnachfrage in Abhängigkeit vom Preis der Wertpapiere erklärt. Dabei werden unterschiedliche Verhaltenshypothesen für verschiedene Typen von Wertpapieranlegern festgelegt.

In der wirtschaftswissenschaftlichen Theorie wurden solche Modelle bisher vornehmlich unter dem Aspekt der Bestimmungsgründe für die spekulative Kassenhaltung behandelt. Die einzelwirtschaftlichen Analysen beziehen dabei neben Einkommen und

1) Ebenda.

2) Vgl. Zeeman, On the Unstable Behavior of Stock Exchange, in: Journal of Mathematical Economics 1 (1974), S. 39 - 49.

Vermögen vor allem individuelle Erwartungen über Zins- resp. Kursvariationen als Determinanten ein. Die Modelle führen letztlich zur Bestimmung von optimalen Geldanlagen (portfolio selection) in Abhängigkeit von der individuellen Situation des Wirtschaftssubjekts (Einkommen, Vermögen usw.) und den subjektiven Wahrscheinlichkeitsverteilungen für Zins- bzw. Kursveränderungen der betrachteten Wertpapiere, wobei in den Wahrscheinlichkeitsverteilungen auch die individuelle Risikobereitschaft zum Ausdruck kommt.¹⁾

Das im folgenden dargestellte Modell bezieht weniger Einflußgrößen zur Erklärung von Nachfrageüberschüssen, resp. -defiziten, ein. Allerdings will das Modell nicht primär das Nachfrageverhalten erklären, sondern die Richtung der Kursveränderungen bei bestimmten Nachfragekonstellationen. Insbesondere sollen mögliche sprunghafte Veränderungen in der Kursentwicklung analytisch dargestellt werden. Dabei findet keine Differenzierung zwischen einzelnen Wertpapierarten oder gar besonders spezifizierten Wertpapieren statt, vielmehr wird die Kursentwicklung durch einen Index repräsentiert. Die Erklärung der Verhaltensmuster zweier Typen von Anlegern erfolgt durch Gleichungen mit diesem Index als einzige erklärende Variable.

Neben der Vernachlässigung von bisher in der Wirtschaftstheorie erarbeiteten Ergebnissen ist das Modell noch weiterer Kritik zu unterwerfen. Diese eher modellimmanente Kritik, die durch die

1) Vgl. Jarchow, Theorie und Politik des Geldes, I. Geldtheorie, Göttingen 1973, S. 80 ff. Eine ausführliche Darstellung der entscheidungstheoretischen Grundlagen für spekulatives Verhalten findet sich in: Hochgesand, Zur Theorie der Devisenspekulation, Diss. Mainz 1972, S. 5 ff.

Methode, also die Anwendung der Katastrophentheorie, gegeben ist, diskutieren wir im Kapitel (6).

Betrachten wir nun das Modell: ¹⁾

Der Zustand an einer Börse sei durch einen Index I (z.B. Dow Jones, FAZ-Index) charakterisiert. Die Veränderung des Index bezeichnen wir mit

$$J = \dot{I} = \frac{dI}{dt}.$$

$J = 0$ repräsentiert einen statischen Markt, während $J > 0$ eine Hausse ²⁾ signalisiert und $J < 0$ eine Baisse ³⁾.

Die Veränderung des Index ist abhängig von Käufen und Verkäufen der Investoren. Gleichzeitig beeinflußt die Indexvariation das Verhalten der Investoren (feed back). Zur Beschreibung dieses dynamischen Prozesses benötigen wir also Annahmen über das Verhalten der Investoren.

Wir wollen zwei Typen von Investoren unterscheiden:

"Fundamentalisten" und "Chartisten". Fundamentalisten seien die Investoren, welche die Marktentwicklung aufgrund ökonomischer Faktoren abschätzen. Bevor ein Fundamentalist in eine Firma investiert, untersucht er ihre Erfolgchancen, ihr Marktpotential, ihr Wachstumspotential etc. Chartisten bestimmen dagegen ihr Verhalten aufgrund der Marktbewegungen; aus den Charts der Vergangenheit extrapolieren sie die zukünftigen Bewegungen. Spekulanten tendieren zu einem solchen Verhalten.

1) Vgl. Zeeman, On the Unstable Behavior ..., a.a.O., S. 39 ff.

2) Bull market.

3) Bear market.

Mit C bezeichnen wir den Teil des Marktvolumens, der von Chartisten gehalten wird, m.a.W. den Teil des spekulativen Geldes im Markt. F sei die Überschußnachfrage der Fundamentalisten.¹⁾

Wenn wir von weiteren Faktoren absehen, können wir dynamische Beziehungen zwischen C , F und J annehmen, die durch gewöhnliche Differentialgleichungen beschrieben werden können. Für eine qualitative Analyse genügt es, wenn wir C , F , J als Koordinaten im 3-dimensionalen euklidischen Raum $\mathbb{R}^3$ betrachten mit C und F als horizontale Koordinaten und J als vertikale Komponente. Die Differentialgleichungen sind gegeben durch ein Vektorfeld X auf $\mathbb{R}^3$. Elemente dieses Vektorfeldes X sind Vektoren, welche für jeden Punkt im $\mathbb{R}^3$ die Veränderungen der Komponenten (C, F, J) für eine infinitesimale Zeitvariation (dt) angeben; d.h. Vektoren der Form $(\dot{C}, \dot{F}, \dot{J})$. Wählen wir einen beliebigen Punkt (C, F, J) im $\mathbb{R}^3$ aus, so bestimmt der zugehörige Vektor $(\dot{C}, \dot{F}, \dot{J})$ die Richtung und die Geschwindigkeit der Komponentenvariation. Im nun erreichten Punkt gibt ein zugehöriger Vektor $(\dot{C}, \dot{F}, \dot{J})$ die weiteren Veränderungen an usw. Auf diese Weise entstehen Lösungskurven, die das dynamische Verhalten einer Börse repräsentieren sollen.

Um zu qualitativen Aussagen zu gelangen, nehmen wir als Hypothesen einige beobachtbare, qualitative Merkmale der Börse, die wir in eine geeignete mathematische Form überführen:

1) Eine Überschußnachfrage der Chartisten wird nicht explizit betrachtet; sie kann als Differenz zwischen Gesamtnachfrageüberschuß und F angesehen werden. Nach o.a. Definition von C kann diese Differenz als interner Marktmechanismus interpretiert werden, während F eher exogenen Charakter hat.

- (1) J reagiere auf C und F schneller als C und F auf J .

An der Börse sollen Angebot und Nachfrage über die Aktienkurse ausgeglichen werden, so daß Verhaltensänderungen (hier durch C und F dargestellt) sofort auf den Index "durchschlagen", während die Rückkoppelung der Indexvariation auf das Verhalten mit einer Verzögerung vonstatten geht.

Mathematisch können wir das so formulieren, daß für "die meisten" Punkte die Vertikalkomponente $\dot{J}$ eines Vektors $(\dot{C}, \dot{F}, \dot{J})$ viel größer ist als die beiden Horizontal-komponenten. Oder anders formuliert, das Richtungsfeld ist "fast überall" vertikal. Die Begriffe "die meisten" und "fast überall" haben mathematisch eine festgelegte Bedeutung. In der Katastrophentheorie werden sie im Zusammenhang mit dem topologischen Begriff der Generizität ¹⁾ benötigt. Der Begriff "die meisten" ist hierbei enger gefaßt, als er in der Umgangssprache verwendet wird. In unserem Beispiel sind alle Punkte des dreidimensionalen Raumes gemeint mit Ausnahme besonders ausgewählter Punkte, wo $J = 0$. Diese Punkte bilden eine Fläche S im dreidimensionalen Raum ²⁾, den Attraktor.

Wählen wir einen beliebigen Punkt außerhalb von S , so bringt die oben beschriebene Dynamik (vertikale Richtungskurve außerhalb von S) den Punkt schnell auf die Fläche S . Auf dem Attraktor verschwindet die Vertikalkomponente $\dot{J}$, d.h. $\dot{J} = 0$; hier dominieren die bisher vernachlässigten Horizontalkomponenten $\dot{C}$ und $\dot{F}$, welche als "langsame" Veränderungen den Rückkoppelungseffekt von J auf C und F repräsentieren.

1) Vgl. unten, Kapitel (33).

2) mit dem Lebesgue Maß 0, so daß hier auch der maßtheoretische Begriff des Wortes "meist" angewandt werden könnte.

Der Attraktor S ist charakterisiert durch $\dot{J} = 0$, und als die Fläche im betrachteten dreidimensionalen Raum ausgezeichnet, auf die alle anderen Punkte sehr schnell zustreben. Für gegebene C und F stellt der zugehörige Punkt auf dem Attraktor ein Gleichgewichtspunkt dar. Allerdings in einem anderen Sinn als in der traditionellen Gleichgewichtstheorie, da der gesamte Attraktor als "Gleichgewichtsfläche" anzusehen ist. Sind die Nachfragekomponenten C und F vorgegeben, so wird ceteris paribus ein Gleichgewichtspunkt erreicht, wo $\dot{J} = 0$, d.h. wo sich der Index mit konstanter Rate verändert ($I = J = \text{konstant}$, wenn $\dot{J} = 0$). Ist etwa ein Nachfrageüberschuß gegeben, wird der Index mit konstanter Rate wachsen bei sonst gleichbleibenden Bedingungen. Die erwarteten Rückkoppelungseffekte auf das Verhalten der Fundamentalisten und Chartisten auf das konstante Ansteigen des Indexes haben wir zunächst ausgeklammert, hierzu sind weitere Hypothesen erforderlich.

Die Attraktorfläche S ist gegeben durch eine Funktion $J = J(C, F)$. Uns interessiert hier besonders die Gestalt der Fläche und die qualitativen Eigenschaften der "langsamen" Veränderungen auf S . Dabei untersuchen wir, ob S Falten oder andere Singularitäten hat, die bei Mehrdeutigkeiten der Funktion $J = J(C, F)$ entstehen können.

Die Hypothese (1) impliziert zunächst die Existenz von S , für die weitere Untersuchung benötigen wir zusätzliche Hypothesen.

- (2) Wenn C klein ist, soll J eine kontinuierliche, monoton steigende Funktion von F durch den Ursprung sein (Abb. 2-1).

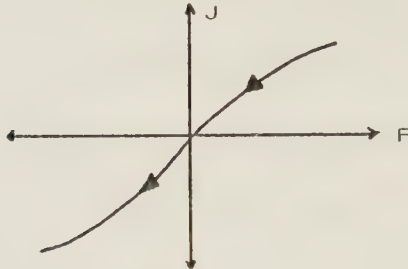


Abb. 2-1

Wenn wir die spekulative Nachfragekomponente vernachlässigen können und der Markt von gut informierten Investoren beherrscht wird, bleibt bei ausgeglichenen Käufen und Verkäufen der Index konstant ($J = 0$). Ein Nachfrageüberschuß läßt den Index steigen, $J > 0$, ein Angebotsüberschuß fallen, $J < 0$. Wenn $F = 0$, liegt $J = 0$ auf dem Attraktor und repräsentiert ein "stabiles" Gleichgewicht, d.h. der Markt ist ausgeglichen, solange keine externen Einflüsse auftreten.

- (3) Wenn C groß ist, führe das in diesem Modell zu einem instabilen Markt. Sehen wir von der Überschußnachfrage der Fundamentalisten ab, $F = 0$, so besagt diese Hypothese, daß $J = 0$ kein Gleichgewicht mehr ist, da das spekulative Geld die Börsenkurse beeinflussen wird. Die Indexveränderung beeinflußt ihrerseits wieder das Verhalten der Chartisten. Steigt der Index, entsteht eine Hausse; J wird sich einer Gleichgewichtsposition, $J > 0$, nähern. Umgekehrt, wenn der Index fällt, wird eine Baisse J in eine andere Gleichgewichtsposition, $J < 0$, bringen.

Für gegebene C und F erreicht das System "schnell" einen Punkt auf dem Attraktor, den wir als Gleichgewichtspunkt ansehen. Man kann den so erreichten Punkt als "labiles" Gleichgewicht ¹⁾ bezeichnen, da die Rückkoppelungseffekte von J auf C und F zu einem Punkt außerhalb des Attraktors führen können. Von diesem neuen Ausgang strebt das System "schnell" auf den Attraktor zurück, erreicht aber dort einen anderen "labilen" Gleichgewichtspunkt.

1) Zeeman bezeichnet die so erreichten Gleichgewichte als "stabil". Da diese Definition von Stabilität unüblich ist, wollen wir uns dieser Terminologie nicht anschließen. Vgl. Zeeman, On the Unstable Behavior, ..., a.a.O., S. 42 f.

Diese Hypothese hat die Konsequenz, daß die Funktion $J(C, F)$ für große C und betragskleine F zweiwertig ist, d.h. der Attraktor S ist 2-flächig (siehe Abb. 2-2):

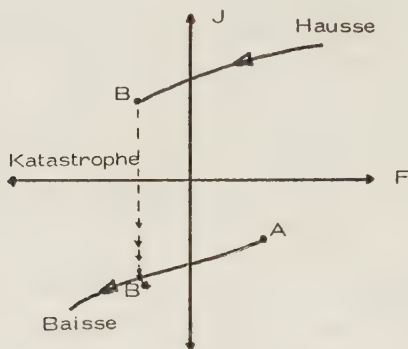


Abb. 2-2

In der Nähe des Ursprungs besteht der Graph aus zwei monotonen Kurven, bezeichnet als Hausse und Baisse. Wird F sehr groß, m.a.W. beherrscht der Nachfrageüberschuß der Fundamentalisten den Markt, wird die Baisse irgendwo enden (Punkt A). Umgekehrt soll bei hohem Angebotsüberschuß der Fundamentalisten die Hausse am Punkt B beendet werden. Steigt der Angebotsüberschuß der Fundamentalisten über den Punkt B, so führen die abnehmenden Zuwachsraten der Kurse auch zu einer abrupten Änderung des Verhaltens der Chartisten, die nun Gewinne durch Verkäufe

realisieren wollen. Die so entstehenden großen Angebotsüberschüsse führen zu einem abrupten Sinken der Kurse ($B \rightarrow B^*$). Solche plötzlichen Änderungen bezeichnen wir als Katastrophe (im Sinne der Katastrophentheorie).

Fassen wir die bisherigen Hypothesen zusammen, so können wir den Attraktor S im 3-dimensionalen Raum darstellen.¹⁾

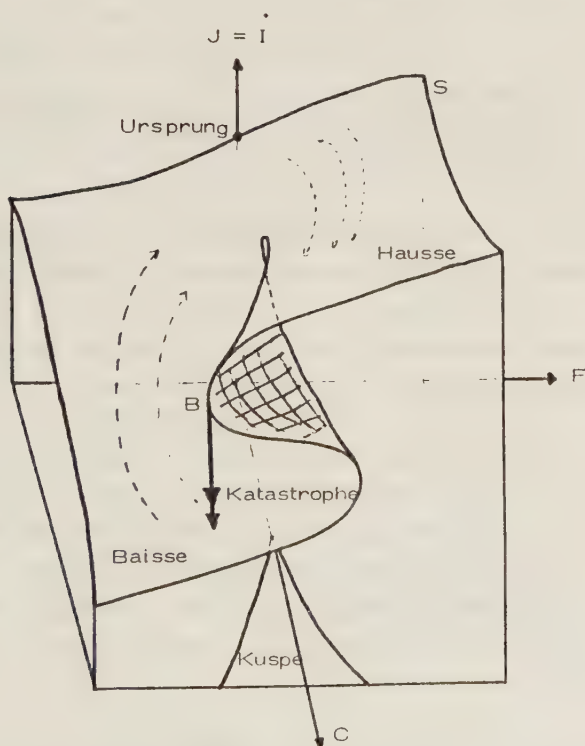


Abb. 2-3

1) Eine weitergehende mathematische Beschreibung wird im Kapitel 3 gegeben. Siehe auch: Zeeman, On the Unstable Behavior ..., a.a.O., S. 44 f.

Projizieren wir die Grenzen von S , an denen S mehrwertig ist, in die Ebene, erhalten wir die Kuspel (Bogenscheitel). Die Kuspel charakterisiert die Punkte, an denen eine plötzliche Änderung von J erfolgt, wenn diese Schwelle von den Verhaltensparametern C und F überschritten wird. Es sei noch bemerkt, daß die schraffierte Fläche in Abb. 2-3 (die Repellor-Fläche) ohne Bedeutung für die Anwendung ist, da das System nur auf der Attraktorfläche S verweilt.

Um die Rückkoppelungseffekte von J auf C und F , m.a.W. die "langsamen" Richtungsänderungen auf S , zu beschreiben, benötigen wir vier zusätzliche Hypothesen. Aus diesen resultieren die gestrichelten Linien in Abb. 2-3.

- (4) $\dot{C}$ habe dasselbe Vorzeichen wie J ; d.h. die Chartisten folgen dem Trend. Für die Chartisten sei eine Hausse so attraktiv, daß zusätzliches spekulatives Geld in den Markt fließt, während bei einer Baisse der Anteil der spekulativen Mittel zurückgeht.
- (5) $\dot{F} < 0$ nachdem I lange gestiegen ist, auch wenn I weiter steigt. Die Erfahrung der Fundamentalisten, daß eine Hausse nicht ewig währt, und die Einschätzung der industriellen Kapazität hinter den Marktbewegungen lassen eine Überbewertung des Marktes nicht zu. Die Fundamentalisten tendieren dann zu Gewinnmitnahmen bevor das Maximum von I erreicht ist.
- (6) $\dot{F} < 0$ nach einem kurzen Rückgang von I .
Oft verfolgen die Fundamentalisten die Strategie, für jede Aktie eine Marge auszuwählen; fällt der Kurs unter diese Marge, verkaufen sie. Ist der Kursrückgang groß genug, ist auch $\dot{F} < 0$.

- (7) $\dot{F} > 0$, wenn I einige Zeit gefallen ist und sich allmählich fängt. Erholt sich der Markt langsam von einer Baisse, so wird es für die Fundamentalisten vorteilhaft sein, kurzfristig geringe Verluste in Kauf zu nehmen, die durch größere Gewinne langfristig überkompensiert werden können, wenn die Kurse eine Unterbewertung der Aktien vermuten lassen. Dies ist der Fall, wenn $J < 0$ und $\dot{J} > 0$.

Das Marktverhalten, das aus den Hypothesen (4) - (7) folgt, ist in Abb. 2-3 gestrichelt dargestellt.

Betrachten wir nun das Zusammenwirken aller Verhaltensannahmen auf das dynamische Verhalten unseres Systems "Börsenmarkt". Ohne externe Einflüsse wird der Markt sich vermutlich in einem stabilen und relativ statischen Gleichgewicht befinden. Durch zufällige Einflüsse nehme nun die Nachfrage der Fundamentalisten zu.¹⁾

Der Nachfrageüberschuß führt zu einer Erhöhung des Index. Diese Erhöhung beeinflußt die Chartisten ebenfalls zu kaufen, die Hausse beschleunigt sich. Wenn der Anteil des spekulativen Geldes zu groß wird, werden die Fundamentalisten ihre Gewinne realisieren. Die leicht sinkenden Kurse beeinflussen wiederum das Verhalten der Chartisten, die ebenfalls Gewinne "mitnehmen" möchten. Dieser große Angebotsüberschuß führt zu einem plötzlichen Kurszusammenbruch, der Index fällt abrupt. In Abb. 2-3 verdeutlicht dies der Übergang von der Hausse-Ebene

1) Daß Fundamentalisten auf einem Markt investieren, der bisher statisch war, kann aus den Unsicherheiten bei anderen Anlageformen folgen oder auch aus Erkenntnissen neuerer ökonomischer Analysen.

nach Überschreiten der Kuspenschwelle auf die Baisse-Ebene. Schließlich findet wieder eine langsame Erholung statt, wenn die Fundamentalisten erneut zu investieren beginnen.

Diese modellmäßige Betrachtung der Marktentwicklung an einer Börse läßt alle externen Einflüsse außer acht, so daß damit nur ausgewählte Aspekte der Realität beschrieben werden können. Das Beispiel sollte jedoch vor allem eine mögliche Anwendung der Katastrophentheorie in der Ökonomie beschreiben, dabei haben wir uns auf eine grobe Beschreibung der Kusse beschränkt.

(3) Mathematische Grundlagen der

Katastrophentheorie

Ob die Katastrophentheorie als eigenständige mathematisch Theorie, wie z.B. die Zahlentheorie, Operatortheorie, Maßtheorie, betrachtet werden kann, ist umstritten.¹⁾ Es bestehen allerdings enge Verbindungen zwischen der Katastrophentheorie und der mathematischen Theorie der Singularitäten von glatten Abbildungen, kurz Singularitätentheorie. Zunächst geben wir eine Übersicht wichtiger Grundlagen dieser Theorie, soweit sie für die Katastrophentheorie wesentlich sind.

Einige Bemerkungen über das Wesen der Katastrophentheorie schließen sich an. Dann skizzieren wir Thom's Klassifikationstheorem und betrachten anschließend die Dynamik in Katastrophenmodellen.

Auf einen ausführlichen mathematischen Aufbau der Katastrophentheorie wird verzichtet zugunsten eines verständlichen Überblicks über die wichtigsten Theoreme.²⁾

-
- 1) Vgl. Sussmann, Catastrophe Theory: A Preliminary Critical Study, vorgestellt auf einer Tagung in Chicago 1976 (erscheint in den Veröffentlichungen dieser Tagung), S. 3.
 - 2) Die Grundlegung findet man in: Thom, Structural Stability and Morphogenesis, Massachusetts 1975. Weitere ausführliche mathematische Darstellungen: Zeeman, The Classification of Elementary Catastrophes of Codimension ≤ 5 , in: Hilton (ed.), Structural Stability, the Theory of Catastrophes, and Applications in the Sciences, Berlin, Heidelberg, New York 1976, S. 263 - 326; Yung-Chen Lu, Singularity Theory and an Introduction to Catastrophe Theory, New York, Heidelberg, Berlin 1976, S. 95 ff und S. 166 ff; Sussmann, Catastrophe Theory, in: Synthese 31 (1975), S. 226 - 270; Callahan, Singularities

(31) Einige Theoreme der Singularitätentheorie ¹⁾

Ausgangspunkt sind glatte Funktionen

$$f(x_1, x_2, \dots, x_m)$$

verschiedener reeller Variablen und glatte Familien

$$f(a_1, \dots, a_k; x_1, \dots, x_m)$$

von Funktionen in m Variablen, die von k Parametern a_i ($i = 1, \dots, k$) abhängen. Eine Familie von Funktionen in m Variablen, die von k Parametern abhängen, ist dasselbe wie eine Funktion von $(k + m)$ Variablen, allerdings bezeichnen wir im ersten Fall die ersten k Variablen als "Parameter". Glatt bedeutet "beliebig oft differenzierbar". Meistens betrachten wir glatte Familien

$$f(a_1, \dots, a_k; x)$$

and Plane Maps, in: The American Mathematical Monthly 81 (1974), S. 211 - 240.

Eine kurze Übersicht geben z.B.: Zeeman, Applications of Catastrophe Theory, in: Hattori (ed.), Manifolds - Tokyo 1973, Tokyo 1975, S. 11 - 23; Güttinger, Catastrophe Geometry in Physics and Biology, in: Conrad, Güttinger, Dal Cin (ed.), Physics and Mathematics of the Nervous System, Berlin, Heidelberg, New York 1974, S. 2 - 30 und Schwegler, Bächtle, Die Katastrophentheorie, in: Bild der Wissenschaft 15, Heft 11 (November 1978), S. 130 - 140.

Eine umfangreiche Bibliographie zu den mathematischen Grundlagen und zur Anwendung der Katastrophentheorie findet man in: Manning (ed.), Dynamical Systems - Warwick 1974, Berlin, Heidelberg, New York 1975, S. 390 - 401.

1) Vgl. Sussmann, Catastrophe Theory: A Preliminary Critical Study, a.a.O., S. 4 ff.

von Funktionen einer Variablen, wobei wir mit f' die Ableitung von f in Bezug auf x bezeichnen.

Ein kritischer Punkt einer glatten Funktion $f(x)$ ist ein Punkt x_0 , für den gilt

$$f'(x_0) = 0.$$

Das ist entweder ein lokales Maximum oder ein lokales Minimum oder ein Sattelpunkt.

Ein kritischer Punkt einer Familie $f(a_1, \dots, a_k; x)$ ist ein Punkt

$$(a_1^0, \dots, a_k^0; x_0)$$

im $(k+1)$ -dimensionalen Raum, für den gilt

$$f'(a_1^0, \dots, a_k^0; x_0) = 0.$$

Die Zusammenfassung aller kritischen Punkte einer Familie f ist eine Punktmenge

$C(f)$ im $(k+1)$ -dimensionalen Raum,

die als kritischer Ort von f bezeichnet wird.

Im Allgemeinen nimmt man an, daß $C(f)$ eine "Hyperfläche" ist (z.B. eine Kurve in der Ebene, wenn $k = 1$, eine Oberfläche im Raum, wenn $k = 2$), weil sie durch eine Gleichung definiert ist, nämlich

$$f' = 0.$$

Obwohl es Ausnahmen hierzu gibt, z.B.

$$f(a, x) \equiv 0,$$

gilt diese Eigenschaft für die "meisten" f .

Eine Präzisierung des Begriffes "meist" geben wir in (33). Das zugrundeliegende Konzept der Generizität besagt in diesem Fall, daß jeder kritische Ort $C_1(f)$ durch einen kritischen Ort $C_2(f)$ approximiert werden kann, der eine Hyperfläche ist.

Die oben beschriebene Ausnahme,

$$f(a, x) \equiv 0,$$

können wir z.B. durch folgende annähern:

$$f_{\alpha}(a, x) = (a \cdot x)^{-\alpha} \quad \alpha \text{ sehr groß, etwa } 10^{10},$$

$f(a, x) \equiv 0$ kann beliebig nahe durch $f_{\alpha}(a, x)$ approximiert werden bei geeigneter Wahl von α .

Setzen wir die erste Ableitung

$$f'_{\alpha} = 0,$$

ergibt sich

$$x = \frac{1}{a} \quad \text{für } a \neq 0,$$

d.h. dies ist der kritische Ort von f_{α} , der eine Hyperfläche ist (sogar der Graph einer Funktion).¹⁾

1) Die Hyperfläche ist ein umfassenderer Begriff als der Graph einer Funktion. Während die Hyperfläche eine n -dimensionale Parameterdarstellung ist, die nur lokal als Funktion dargestellt werden kann, hat jede Funktion einen bestimmten Graphen (bei glatten Funktionen die die Funktion darstellende Kurve).

Vgl. Benke, Rommert, Steiner, Tietz (Hrsg.), Fischer Lexikon Mathematik, Frankfurt 1964/66, Band I, S. 263 f, Band II, S. 303.

$C(f)$ ist speziell dann eine Hyperfläche in der Umgebung eines Punktes

$$p = (a_1^0, \dots, a_k^0; x_0),$$

wenn p kein kritischer Punkt von f^I ist, d.h. wenn

$$f''(p) \neq 0.$$

Diese Punkte werden als nicht entartet bezeichnet.

Für die Umgebung von nicht entarteten Punkten p kann die Gleichung

$$f^I(a_1, \dots, a_k; x) = 0$$

für x als Funktion der $a_1, \dots, a_k$ gelöst werden, d.h. es findet sich eine glatte Funktion

$$h(a_1, \dots, a_k),$$

die definiert ist für $a_1, \dots, a_k$ in der Nähe von

$a_1^0, \dots, a_k^0$, so daß

$$f^I(a_1, \dots, a_k; x) = 0,$$

wenn und nur wenn

$$x = h(a_1, \dots, a_k).$$

Dies besagt, daß in der Nähe von p der kritische Ort $C(f)$ nicht nur eine Hyperfläche ist, sondern ein Graph der Funktion

$$x = h(a_1, \dots, a_k).$$

Die kritischen, entarteten Punkte

$$p = (a_1^0, \dots, a_k^0; x)$$

werden als Katastrophenpunkte bezeichnet. Bei der Betrachtung einer Familie

$$f(a_1, \dots, a_k; x)$$

bezeichnen wir den k -dimensionalen Raum der Variablen $a_1, \dots, a_k$ als Parameter- oder Kontrollraum und einen Punkt $(a_1^0, \dots, a_k^0)$ im Kontrollraum ebenfalls als Katastrophenpunkt, wenn es ein x_0 gibt, so daß

$$(a_1^0, \dots, a_k^0; x_0) \text{ ein Katastrophenpunkt ist,}$$

im Sinne der ersten Definition.

Die Zusammenfassung der Katastrophenpunkte $(a_1^0, \dots, a_k^0; x_0)$ heißt Singularitätenmenge $S(f)$ von f , während die Menge der Katastrophenpunkte $(a_1^0, \dots, a_k^0)$ des Parameter- raums als Katastrophen- oder Bifurkationsmenge¹⁾ $B(f)$ bezeichnet wird.

Wir veranschaulichen die Ausführungen an einem einfachen Beispiel, der Falte (fold)²⁾. Sei

$$f(a, x) = x^3 - 3ax,$$

so daß f eine Familie von Funktionen ist, die vom Parameter a abhängen. Dann ist

$$f'(a, x) = 3x^2 - 3a,$$

so daß der kritische Ort $C(f)$ eine Untermenge der (a, x) -Ebene ist, definiert durch die Gleichung

$$x^2 = a.$$

1) Bifurkation = Gabelung.

2) die einfachste mögliche Katastrophe.

$C(f)$ ist also eine Parabel, deren Achse parallel zur a -Achse verläuft. Da $f''(x) = 6x$, sind alle kritischen Punkte nicht entartet mit Ausnahme des Katastrophenpunktes $a = 0$, $x = 0$. Also besteht $S(f)$ aus einem Punkt, dem Ursprung der (a, x) -Ebene, und $B(f)$ hat ebenfalls nur einen Punkt, den Ursprung der reellen Linie.

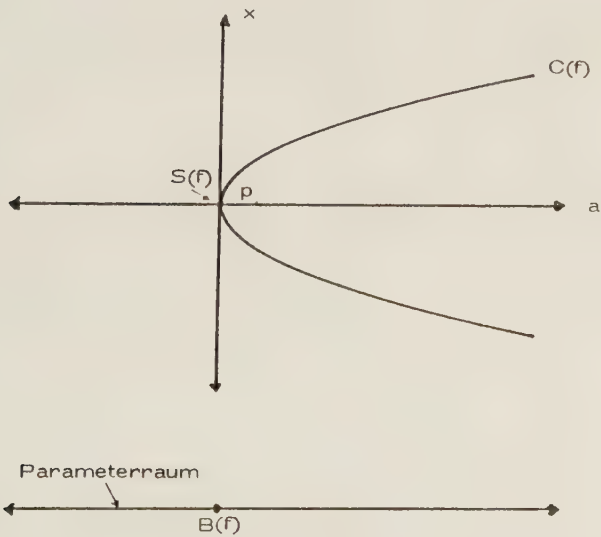


Abb. 3-1 Die Falte

Warum nennen wir $a = 0$ eine Katastrophe? Betrachten wir den Graph von f als Funktion von x für verschiedene Werte von a . Wenn a negativ ist, hat die Funktion weder lokale Maxima noch Minima. Für $a > 0$ hat die Funktion zwei Extremwerte: ein Maximum und ein Minimum, d.h. bei $a = 0$ erfolgt eine plötzliche Änderung zwischen zwei völlig verschiedenen Verhaltensweisen, daher der Name "Katastrophe".

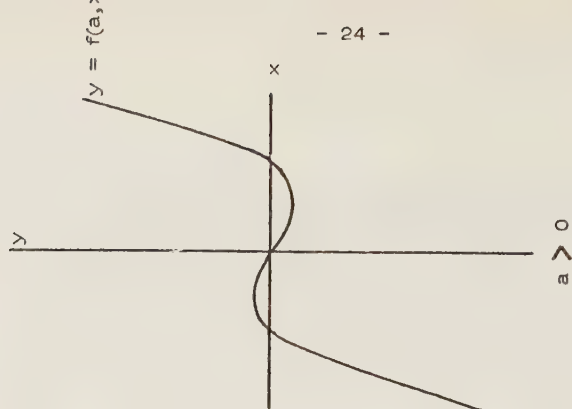
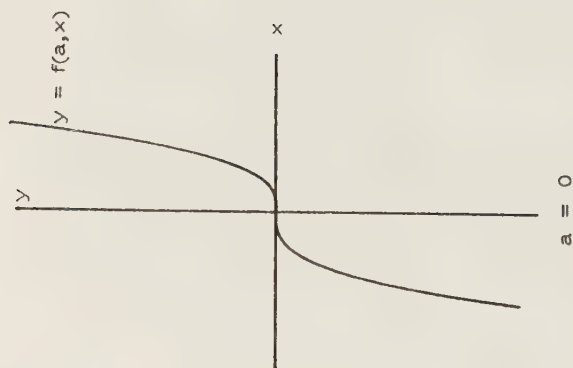
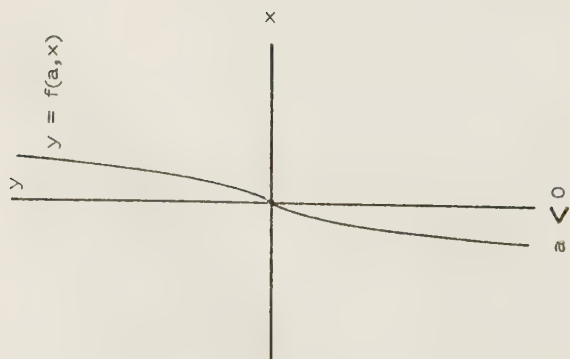


Abb. 3-2 Verlauf des Graphen der Funktion $y = f(a, x) = x^3 - 3ax$ für verschiedene a .

Das vorstehende Beispiel soll nun verallgemeinert werden. Wir wollen jeden beliebigen Katastrophenpunkt als "Falte" betrachten, wenn der kritische Ort $C(f)$ dieses Katastrophenpunktes "so aussieht wie" die oben beschriebenen Falte. Dazu benötigen wir das Konzept der Äquivalenz (von Singularitäten). Grob können wir dieses Konzept so charakterisieren: zwei Singularitäten seien äquivalent, wenn wir die eine in die andere überführen können mittels einer Koordinatentransformation. Dabei sollen aber nicht alle Transformationen erlaubt sein, weil bestimmte qualitative Merkmale erhalten bleiben sollen.

Betrachten wir zwei glatte Familien

$$f(a_1, \dots, a_k; x) \text{ und}$$

$$g(a_1, \dots, a_k; x)$$

mit den kritischen Punkten

$$p = (a_1^0, \dots, a_k^0; x^0) \text{ und}$$

$$\bar{p} = (\bar{a}_1^0, \dots, \bar{a}_k^0; \bar{x}^0) \text{ von } f \text{ und } g.$$

Wir sagen, daß $C(f)$ nahe p aussieht wie $C(g)$ nahe $\bar{p}$, wenn es eine glatte Transformation T gibt, welche eine Umgebung U von p auf eine Umgebung V von $\bar{p}$ abbildet und welche eine glatte Inverse hat, und wenn gilt: für q in U ist $T(q)$ in $C(g)$, wenn und nur wenn q in $C(f)$ ist. Eine solche erlaubte Transformation nennt man Diffeomorphismus T von einer offenen Teilmenge U auf eine offene Teilmenge V mit der Eigenschaft: wenn $q \in U$ in derselben Äquivalenzklasse (Faser) wie $p \in U$ ist, folgt, daß Tq in derselben

Äquivalenzklasse wie T_p ist.

Wir können uns das so veranschaulichen, daß die Bilder von zwei Punkten, die auf derselben "vertikalen Linie" liegen, nach der erlaubten Transformation T wieder auf derselben "vertikalen Linie" liegen. Zwei nicht degenerierte, kritische Punkte sind also äquivalent. Der Faltenkatastrophenpunkt kann einem nicht degenerierten Punkt nicht äquivalent sein, da in der Nähe des Faltenkatastrophenpunktes jede vertikale Linie (mit Ausnahme von einer) entweder null oder zwei Punkte von $C(f)$ hat. Diese Eigenschaft muß durch die Transformation erhalten bleiben.

Wir definieren einen kritischen Punkt p einer Familie $g(a, x)$ als Faltensingularität, wenn $C(g)$ nahe p so aussieht wie die kritische Menge von

$$f(a, x) = x^3 - ax$$

nahe dem Ursprung.

Betrachten wir nun die in Kapitel 2 verwendete Katastrophe, die Kuspel¹⁾. Dazu gehen wir von Funktionsfamilien aus, die von zwei Parametern abhängen. Wie bei der Falte stellen wir die Kuspel in einem kanonischen Modell vor und definieren eine willkürliche Singularität als Kuspel, wenn sie dem kanonischen Modell äquivalent ist.

Das kanonische Modell der Familie

$$f(a, b; x)$$

1) Thom bezeichnet sie als Riemann-Hugoniot-Katastrophe.

ist gegeben durch

$$f(a, b; x) = x^4 - 6bx^2 - ax.$$

Der kritische Ort $C(f)$ ist die Menge

$$\{f(a, b; x) \in \mathbb{R}\},$$

die Lösungen von

$$4x^3 - 12bx - a = 0$$

sind.

Dazu betrachten wir den Graph der Funktion

$$z = 4x^3 - 12bx - a$$

für gegebene a, b . Die Werte von x für $z = 0$ entsprechen den Punkten $(a, b; x)$ der kritischen Menge.

Ist $b < 0$, dann gilt

$$\frac{dz}{dx} = 12x^2 - 12b > 0 \quad \text{für alle } x,$$

also nimmt z als Funktion von x stetig zu. Da für $x \rightarrow \pm\infty$ die Werte von z ebenfalls gegen $\pm\infty$ streben, gibt es genau ein x , für das gilt $z = 0$.

Im Falle $b > 0$ ist $\frac{dz}{dx}$ nicht immer positiv. Mit

$$\bar{x} = \sqrt{b}$$

gilt

$$\frac{dz}{dx} < 0 \quad \text{für} \quad -\bar{x} < x < \bar{x}$$

und

$$\frac{dz}{dx} > 0 \quad \text{für} \quad x < -\bar{x} \quad \text{oder} \quad x > \bar{x},$$

d.h. z steigt, solange x von $-\infty$ bis $-\bar{x}$ variiert, erreicht ein lokales Maximum A bei $-\bar{x}$, nimmt dann ab bis ein lokales

Minimum B bei $\bar{x}$ erreicht wird, um dann wieder zu steigen und gegen $+\infty$ zu streben für $x \rightarrow +\infty$.

Darum hat $z = 0$ eine Lösung, wenn $A < 0$ oder $B > 0$, resp. drei Lösungen, wenn $B < 0 < A$.

Nun ist

$$A = -a + 8b^{\frac{3}{2}}$$

und

$$B = -a - 8b^{\frac{3}{2}},$$

$$\text{also } A < 0, \text{ wenn } a > 8b^{\frac{3}{2}} \quad \text{und} \\ B > 0, \text{ wenn } a < -8b^{\frac{3}{2}}.$$

Daraus folgt für gegebene a, b , daß die Anzahl der Punkte $(a, b; x)$ in $C(f)$ drei ist, wenn

$$b > 0 \text{ und } -8b^{\frac{3}{2}} < a < 8b^{\frac{3}{2}},$$

und eins, wenn

$$b < 0 \text{ oder } b > 0 \text{ und } |a| > 8b^{\frac{3}{2}}.$$

Die Untermenge der (a, b) -Fläche, die durch die Gleichung

$$a^2 = 64b^3$$

definiert ist, ist die Bifurkationsmenge $B(f)$, also die Menge, wo das qualitative Verhalten von $y = f(a, b; x)$ sich plötzlich ändert. Die Menge $B(f)$ besteht aus zwei Kurven

$$a = -8b^{\frac{3}{2}} \quad \text{und} \quad a = 8b^{\frac{3}{2}},$$

die sich im Kuspunkt $a = b = 0$ treffen.

Abb. 3-3 zeigt den kritischen Ort und die Bifurkationsmenge der Kuspe.

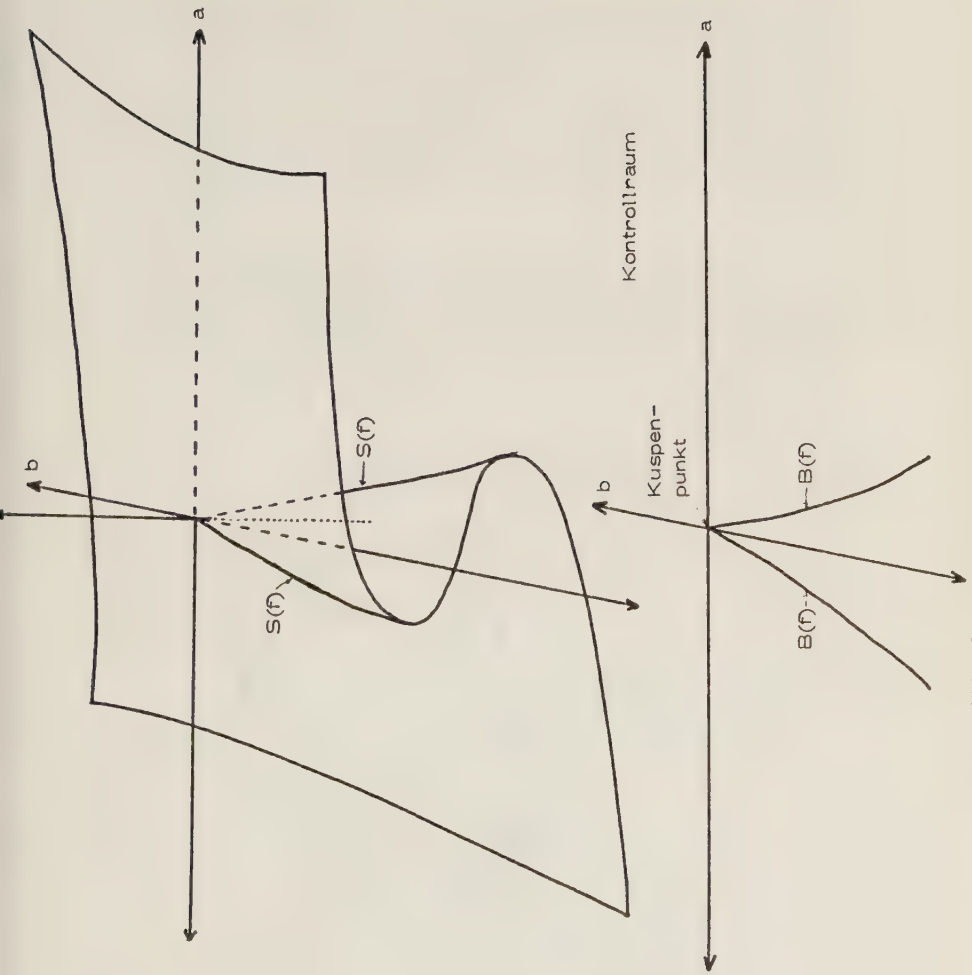


Abb. 3-3 Die Kusppe

Wir betrachten jeden kritischen Punkt, der oben beschriebener Kuspensingularität äquivalent ist, als Kuspenspunkt.

Den Parameter a bezeichnen wir als Normalfaktor, b als Splittingfaktor, da bei gegebenem a ein wachsendes b das einheitliche Minimum in zwei Minima "splittet".

Mit Hilfe eines geeigneten Diffeomorphismus läßt sich die kanonische Form der Kuspensingularität so umformen, daß wir beide Parameter a und b als Konfliktfaktoren betrachten können, ohne eine Aufteilung in Normal- und Splittingfaktor vorzunehmen.

Graphisch können wir dies wie folgt darstellen:

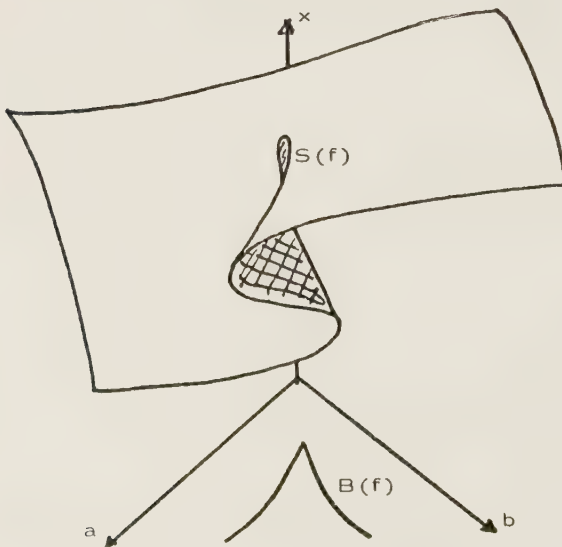


Abb. 3-4 Die Kuspensingularität

Neben der Kusse ist die Schmetterlingskatastrophe¹⁾ für die Anwendungen besonders wichtig. Ausgangspunkte sind Funktionsfamilien mit vier Parametern. Wie bei den bisherigen Betrachtungen stellen wir das kanonische Modell der Schmetterlingskatastrophe vor.

Mit der Familie

$$f(a, b, c, d; x)$$

definieren wir das kanonische Modell der Schmetterlingskatastrophe:

$$f = \frac{1}{6}x^6 - \frac{1}{4}dx^4 - \frac{1}{3}cx^3 - \frac{1}{2}bx^2 - ax$$

$$\text{mit } (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \text{ und } x \in \mathbb{R}.$$

Die dazugehörige kritische Menge $C(f)$ ist vierdimensional und gegeben durch

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x^5 - dx^3 - cx^2 - bx - a = 0.$$

Die vier Kontrollparameter benennen wir wie folgt:

- a Normalfaktor
- b Splittingfaktor
- c Verzerrungsfaktor
- d Schmetterlingsfaktor.

1) Vgl. Zeeman, Applications ..., a.a.O., S. 19 f.

Die kritische Menge $C(f)$ ist enthalten im $\mathbb{R}^5$ und die Bifurkationsmenge B im $\mathbb{R}^4$. Der Schmetterling verallgemeinert die Kusppe, was wir zunächst durch zweidimensionale Bifurkationen verdeutlichen.

Ist der Schmetterlingsfaktor negativ ($d < 0$), wird der x^4 -Term vom x^6 -Term "unterdrückt"; wir erhalten eine Kusppe. Der Effekt von c verzerrt die Position der Kusppe. Vgl. Abb. 3-5.

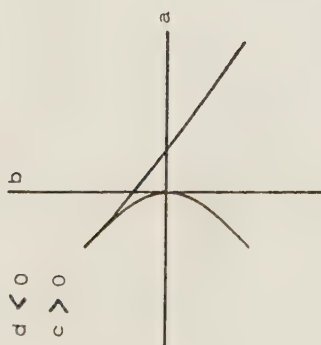
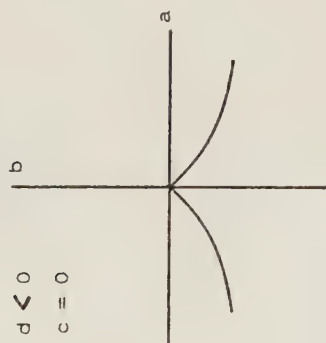
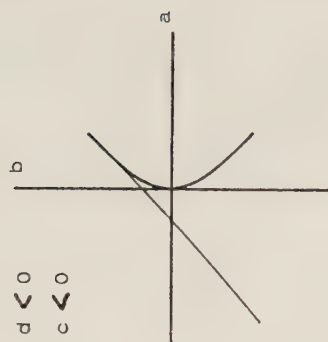


Abb. 3-5

Ist der Schmetterlingsfaktor positiv ($d > 0$), gabelt sich die Kuppe in 3 Kuppen, die eine Tasche umschließen.

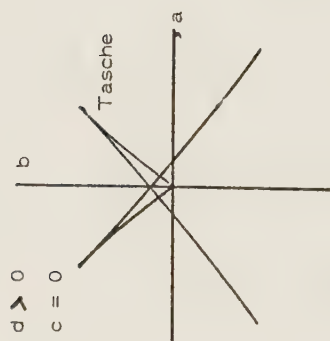
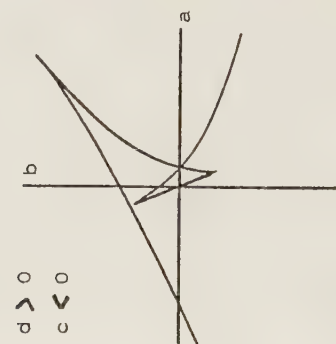
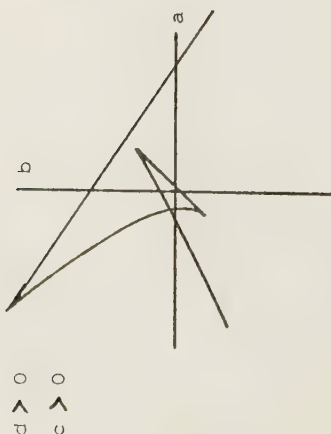


Abb. 3-6



Die Tasche repräsentiert ein Kompromißverhalten als Mittelweg zwischen den beiden extremen Verhaltensweisen, die durch die obere und untere Oberfläche der Kuppe dargestellt werden. Dies zeigt auch Abb. 3-7, eine zweidimensionale Sektion von $C(f)$ über der Kontrollfläche der Abb. 3-6.

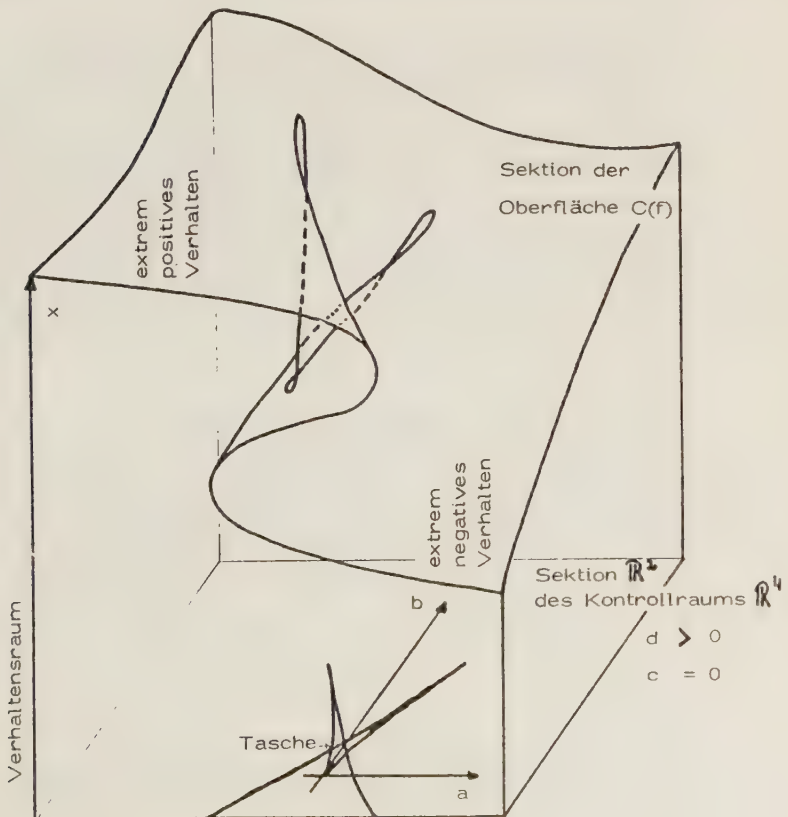


Abb. 3-7

Bei Anwendungen wird als Schmetterlingsfaktor (d) häufig die Zeit festgelegt. In einem solchen Modell nimmt mit dem Zeitablauf die "Tasche" kontinuierlich zu, so daß der Kompromißraum zwischen den extremen Verhaltensweisen immer größer wird und damit das System zu einer Kompromißlösung tendiert (zunehmende Kompromißbereitschaft).

(32) Wesen der Katastrophentheorie

Die Katastrophentheorie wird hauptsächlich vertreten von René Thom und E. Christopher Zeeman, die aber unterschiedliche Meinungen über das Wesen der Katastrophentheorie haben. "Für Thom ist die Katastrophentheorie die Grundlage für einen neuen Ansatz der Naturphilosophie, die Kreation einer neuen Metaphysik, ein neuer Weg, das Konzept von "Objekten" zu betrachten. Zeeman, obwohl er die letzten Ziele des Erfinders der Katastrophentheorie akzeptiert, zieht es vor, sich auf konkretere Anwendungen zu konzentrieren." ¹⁾

Thoms Philosophie ²⁾ kann nur kurz skizziert werden. Er geht von folgendem allgemeinen Modell aus, um die lokalen Zustände eines Systems zu parametrisieren; der Beobachtungsraum M enthält eine abgeschlossene Teilmenge K, die Katastrophenmenge, und, solange ein repräsentativer Punkt m nicht auf K trifft, ändert sich die lokale Natur des Systems nicht. Trifft aber ein Punkt m auf K, gibt es

1) Sussmann, Catastrophe Theory: A Preliminary Critical Study, a.a.O., S. 12.

2) Vgl. Thom, a.a.O., S. 7 f.

Diskontinuitäten im Wesen des Systems, die wir als Veränderung der ursprünglichen Gestalt, als Morphogenese, interpretieren.

"Die lokale Struktur von K , der topologische Typ ihrer Singularitäten usw., wird tatsächlich bestimmt durch eine zugrundeliegende Dynamik, die auf einer Mannigfaltigkeit M definiert ist, aber im allgemeinen nicht ermittelt werden kann. Die Systementwicklung wird durch ein Vektorfeld X auf M definiert, das die makroskopische Dynamik festlegt."¹⁾

Ohne die zugrundeliegende Dynamik oder die makroskopische Entwicklung (definiert durch X) zu kennen, können wir wegen der Beschränkungen von K die Singularitäten des Systems in einer bestimmten Ausdehnung klassifizieren und vorhersagen. Meistens wird umgekehrt vorgegangen: "von einer makroskopischen Untersuchung der Morphogenese des Prozesses und einer lokalen und globalen Studie seiner Singularitäten ausgehend können wir versuchen, die Dynamik zu rekonstruieren, die den Prozeß generiert"²⁾.

Es kann nun eine abstrakte Theorie der Morphogenese entwickelt werden, die unabhängig von den Substraten der Gestalten und der Natur der sie kreierenden Kräfte ist. Diese Idee findet sich bereits bei D'Arcy Thompson³⁾, der dies rein geometrisch darstellte. Neuere Entwicklungen in der Topologie und der

1) Thom, a.a.O., S. 7.

2) Ebenda.

3) Vgl. D'A. W. Thompson, On Growth and Form, Cambridge University Press 1917 zitiert nach Thom, a.a.O., S. XXIII f und S. 8.

Differential Analysis erlauben eine Klassifizierung lokaler Vorfälle von Morphogenesis, die Elementarkatastrophen heißen, wobei die globale, makroskopische Erscheinung, die Gestalt im üblichen Sinn, das Ergebnis der Akkumulation dieser lokalen Vorfälle ist.¹⁾

Die Überlegungen führen zu einem Klassifikationstheorem, welches besagt, daß die Konstellationen der Parameter, die zu Veränderungen der ursprünglichen Gestalt führen (Morphogenesis), nur ganz bestimmte Formen annehmen können, die von der Anzahl der Parameter abhängen und einfachen Polynomen äquivalent sind. Wir wollen das Theorem im folgenden kurz skizzieren.

(33) Thoms Klassifikationstheorem

Zum Verständnis des Theorems benötigen wir zwei Konzepte: Generizität (genericity)²⁾ und Äquivalenz.³⁾

Grob kann Generizität so verstanden werden, daß eine Eigenschaft P von Elementen einer Menge X generisch (generic)

1) Vgl. Thom, a.a.O., S. 8.

2) generic: (1) generisch, Gattungs...; (2) allgemein, generell, typisch.

3) Vgl. Sussmann, Catastrophe Theory: A Preliminary Critical Study, a.a.O., S. 27 f.

ist, wenn die "meisten" Elemente von X diese Eigenschaft P haben. Um "meist" zu präzisieren, benötigt man weitere Informationen über die Struktur von X . Hier interessiert uns die Menge F aller glatten Funktionen der Variablen

$$a_1, \dots, a_k; x_1, \dots, x_n.$$

Wie nun "meist" und Generizität definiert wird, soll hier nicht weiter ausgeführt werden ¹⁾, aber ein wichtiger Tatbestand sei erwähnt: wenn P generisch ist, kann jedes x in X beliebig genau durch Elemente y von X approximiert werden, für die P gilt. ²⁾

1) Allgemein ist Generizität wie folgt definiert:

"Sei S eine Menge einer Topologie ... Eine Eigenschaft P der Elemente von S ist generisch, wenn die Menge aller x in S , die P erfüllen, eine Menge A enthalten, die ein zählbarer Durchschnitt von offenen, dichten Mengen ist."

Lu, a.a.O., S. 3, siehe auch S. 12 ff.

Vgl. außerdem Golubitsky, Guillemin, Stable Mappings and their Singularities, New York 1973; Thom, a.a.O., S. 21 und S. 35; eine exemplarische Darstellung findet sich in: Sussmann, Catastrophe Theory, a.a.O., S. 235 ff und S. 244 ff.

2) Diese Bedingung ist nicht hinreichend, um P generisch zu machen, z.B.: wenn X die Menge der reellen Zahlen und P die Eigenschaft ist, rational zu sein, dann ist P nicht generisch, obwohl jede reelle Zahl beliebig genau durch eine rationale Zahl approximiert werden kann.

Vgl. auch Sussmann, Catastrophe Theory, a.a.O., S. 247 f.

Ein Beispiel für die mathematische Anwendung des Generizitätskonzepts ist der Approximationssatz von Weierstraß: "Jede stetige Funktion $f: (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$ ist durch ganzrationale Funktionen approximierbar" ¹⁾.

Das Konzept der Äquivalenz haben wir bereits in (31) eingeführt, als wir die Falte und Kuppe auch auf die Funktionen ausgedehnt haben, die dem kanonischen Modell äquivalent sind. Es gilt, daß f und g äquivalent sind, wenn eine glatte Transformation $T: C(f)$ auf $C(g)$ möglich ist, welche die Eigenschaft hat, daß die Inverse der Transformation existiert und gegeben ist durch unendlich differenzierbare Funktionen (glatte Inverse). ²⁾

Zunächst verdeutlichen wir das Klassifikationstheorem an einem Beispiel:

"Betrachten wir eine Funktion in einer Variablen und zwei Parametern; ein Faltenpunkt ist ein kritischer Punkt, der dem kritischen Punkt $(0, 0, 0)$ von

$$f(a, b, ; x) = x^3 - 3ax$$

äquivalent ist.

1) Reinhardt, Soeder, dtv-Atlas der Mathematik, München 1974/77, Band 2, S. 313; vgl. auch Lu, a.a.O., S. 12.

2) Allgemein gilt, daß zwei Abbildungen: $f: M \rightarrow N$ und $g: M' \rightarrow N'$ äquivalent sind, wenn es Diffeomorphismen h und k gibt, so daß das folgende Diagramm kommutativ ist:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ h \downarrow & & \downarrow k \\ M' & \xrightarrow{g} & N' \end{array}$$

Vgl. Zeeman, Applications ..., a.a.O., S. 12.

Thoms Theorem für den Zwei-Parameter-Fall sagt, daß eine bestimmte Eigenschaft P von glatten Funktionen generisch ist. Die Eigenschaft P ist definiert durch: f hat P , wenn und nur wenn jeder Katastrophenpunkt von f entweder eine Falte oder eine Kuspel ist." ¹⁾

Das Klassifikationstheorem macht allgemein Aussagen über die Anzahl von Katastrophen für eine beliebige Anzahl von Parametern. Wegen der zentralen Bedeutung für die Katastrophentheorie wollen wir das Theorem ausführlich darstellen, wobei wir die allgemeinere, differentialtopologische Darstellung ²⁾ hier vernachlässigen. ³⁾

Sei

$$f: \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

eine glatte Funktion, die ein dynamisches System wie folgt beschreibt: $\mathbb{R}^k$ repräsentiere die Ursache ⁴⁾ und $\mathbb{R}^n$ den Effekt ⁵⁾.

f stelle nun eine Potentialfunktion dar. Eine Haupthypothese

1) Sussmann, Catastrophe Theory: A Preliminary Critical Study, a.a.O., S. 28.

Dieses Theorem gilt auch für Funktionen mit beliebig vielen internen Variablen bei zwei Parametern.

2) Vgl. o.a. Literaturhinweise.

3) Die Darstellung erfolgt nach Zeeman, Applications ..., a.a.O., S. 11 f.

4) auch Kontrollraum, Parameterraum.

5) auch Verhaltensraum, Raum der internen Variablen.

besagt, daß das System immer ein lokales Minimum von f anstrebt.

Die einfachste Art das lokale Minimierungsverhalten von f zu beschreiben, ist die Definition durch folgende Differentialgleichungen: für einen gegebenen Kontrollpunkt $c \in \mathbb{R}^k$ erhalten wir eine lokale Potentialfunktion:

$$f_c: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

die gegeben ist durch

$$f_c(x) = f(c, x).$$

Die Gradientendifferentialgleichung

$$\dot{x} = -\text{grad}_x f,$$

mit

$$x = (x_1, \dots, x_n)$$

und

$$\text{grad}_x f = \text{grad } f_c = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right]$$

beschreibt ein solches Verhalten¹⁾; denn die Zustände von x bewegen sich auf ein Minimum x_c von f_c . Die Gleichgewichte sind gegeben durch die Minima von f_c .

1) Es sind auch andere Differentialgleichungen auf $\mathbb{R}^n$ möglich, die dasselbe Verhalten beschreiben. Die hier gewählte Gradientengleichung ist die einfachste Darstellung.

Im allgemeinen gibt es mehr als ein Minimum x_c von f_c ;
d.h. x_c ist eine mehrwertige Funktion

$$\mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

Diese Mehrwertigkeit ist Gegenstand von Thom's Analyse.

Um sowohl Minima als auch Maxima und andere stationäre
Werte von f_c in die Betrachtung mit einzubeziehen, definieren
wir allgemein

$$C(f) \subset \mathbb{R}^{k+n}$$

durch

$$\text{grad}_x f = 0.$$

Die "meisten"¹⁾ $C(f)$ sind k -Mannigfaltigkeiten²⁾, weil ihre
Kodimension n ist, gegeben durch n Gleichungen.

Sei

$$B(f) : C(f)^k \rightarrow \mathbb{R}^k$$

die durch die Projektion

$$\mathbb{R}^{k+n} \rightarrow \mathbb{R}^k$$

induzierte Abbildung, die wir Katastrophenabbildung
von f nennen.

1) im Sinne des Genertizitätskonzepts.

2) Mannigfaltigkeiten sind topologische Räume, die sich lokal
nicht von Zahlenräumen unterscheiden. Mannigfaltigkeiten
haben eine sogenannte differenzierbare Struktur, so daß
sich die Grundbegriffe der Infinitesimalrechnung einführen
lassen. Vgl. hierzu und zur Definition der Mannigfaltigkeiten:
Benke u.a. (Hrsg.), Fischer Lexikon Mathematik, a.a.O.,
Band 1, S. 307 ff.

Bezeichnen wir mit $\mathcal{F}$ die Menge der glatten Funktionen mit einer Whitney C^∞ -Topologie¹⁾, können wir Thoms Klassifikationstheorem so darstellen:

"Für $k \leq 5$ gibt es eine offene dichte Menge $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$, die wir generische Funktionen nennen.

Wenn f generisch ist²⁾, gilt

- (1) $C(f)$ ist eine k -Mannigfaltigkeit,
- (2) Jede Singularität von $B(f)$ ist äquivalent einer endlichen Anzahl von Typen, die wir Elementarkatastrophen nennen,
- (3) $B(f)$ ist stabil bei kleinen Veränderungen von f .

Die Anzahl der Elementarkatastrophen hängt alleine von k wie folgt ab:

k	1	2	3	4	5	6
Anzahl der Elementar-katastrophen	1	2	5	7	11	∞

"3)

Wir wollen noch folgendes bemerken:

- (a) Die Anzahl der internen Variablen n geht in die Klassifikation nicht ein; d.h., ob es bei zwei Kontrollparametern ($k = 2$) eine oder 1000 interne Variable gibt, ist ohne

1) Diese besonderen glatten Funktionen haben gegenüber "normalen" glatten Funktionen die Eigenschaft: wenn eine Funktion f nicht verschwindet, verschwindet auch nicht eine andere, beliebig nahe an f liegende Funktion. Zur Definition siehe z.B. Sussmann, Catastrophe Theory, a.a.O., S. 245 f.

2) D.h. $f \in \mathcal{F}_0$.

3) Zeeman, Applications ..., a.a.O., S. 11.

Bedeutung für die möglichen Singularitäten, die entweder der Falte oder der Kuppe äquivalent sind.

- (b) Die Elementarkatastrophen¹⁾ sind gegeben durch einfache Polynome, die leicht graphisch dargestellt werden können.²⁾
Dagegen ist der Beweis des Theorems sehr lang und schwierig.³⁾

Die einfachen Polynome der Elementarkatastrophen müssen auf bestimmte Weise⁴⁾ umgeformt werden, will man zu den Potentialfunktionen für spezifizierte k und n gelangen.

Folgende Tabelle⁵⁾ gibt wichtige kanonische Formen von Katastrophen für $k \leq 4$ und $n = 1$ (Kuspoide) oder $n = 2$ (Umblinks).

1) Für $k \leq 4$ siehe Lu, a.a.O., S. 53,
für $k \leq 5$ siehe Zeeman, The Classification ..., a.a.O.,
S. 315.

2) Graphische Darstellungen der Funktionen sind zu finden in:
Woodstock, Poston, A Geometrical Study of Elementary
Catastrophes, Berlin, Heidelberg, New York 1974.

3) Vgl. Mather, Right Equivalence, Warwick University 1969,
zitiert nach Zeeman, Applications ..., a.a.O., S. 12;
Lu skizziert den Beweis im Anhang II, a.a.O., S. 181 ff.

4) Ein Beispiel für eine solche Umformung (universal unfolding)
findet sich in Thom, a.a.O., S. 32 f.

5) Vgl. Zeeman, Catastrophe Theory, a.a.O., S. 78
und Sussmann, Catastrophe Theory, a.a.O., Tabelle 2.

Name	EK	k	n	Potentialfunktion f	Erste Ableitungen K(f)
Kuspide	x^3	1	1	$\frac{1}{3}x^3 - ax$	$x^2 - a$
	x^4	2	1	$\frac{1}{4}x^4 - ax - \frac{1}{2}bx^2$	$x^3 - a - bx$
	x^5	3	1	$\frac{1}{5}x^5 - ax - \frac{1}{2}bx^2 - \frac{1}{3}cx^3$	$x^4 - a - bx - cx^2$
	x^6	4	1	$\frac{1}{6}x^6 - ax - \frac{1}{2}bx^2 - \frac{1}{3}cx^3 - \frac{1}{4}dx^4$	$x^5 - a - bx - cx^2 - dx^3$
Umbiliks	Hyperbolik (Wellenkamm)	3	2	$x^3 + y^3 + ax + by + cxy$	$3x^2 + a + cy$ $3y^2 + b + cx$
	Elliptik (Haar)	3	2	$x^3 - xy^2 + ax + by + cx^2 + cy^2$	$3x^2 - y^2 + a + 2cx$ $-2xy + b + 2cy$
	Parabolic (Pilz)	4	2	$x^2y + y^4 + ax + by + cx^2 + dy^2$	$2xy + a + 2cx$ $x^2 + 4y^3 + b + 2dy$

EK = Elementarkatastrophen,

k = Anzahl Kontrollparameter,

n = Anzahl Verhaltensparameter

(34) Das dynamische Verhalten

Bei der Formulierung des Klassifikationstheorems haben wir als wesentliche Hypothese gefordert, daß das System immer ein lokales Minimum der Potentialfunktion anstrebt.

Diese Forderung kann bei bestimmten Parametervariationen zum Phänomen der Diskontinuität führen.

Betrachten wir ein System, dessen Verhalten durch eine reelle Variable x beschrieben werden kann.

Das System zeigt ein globales Minimierungsverhalten, wenn es eine Funktion $f(x)$ gibt, die das System zu minimieren sucht, z.B. ein $\bar{x}$ auszuwählen, für das

$$f(\bar{x}) < f(x) \quad \text{für alle } x \neq \bar{x}$$

(existiert ein solches $\bar{x}$ nicht, ist das Verhalten nicht wohl definiert).

Das System zeigt ein lokales Minimierungsverhalten, wenn es versucht, x in der Richtung des abnehmenden f zu ändern, wenn immer dies möglich ist. Das System befindet sich im Gleichgewicht, d.h. x ändert sich nicht, wenn x ein lokales Minimum von f ist.

Die Unterschiede der Verhaltensweisen verdeutlicht Abb. 3-8. Der Punkt stellt den lokalen Minimierungspunkt dar, während der Stern den globalen Minimierungspunkt anzeigt.¹⁾

1) Vgl. Sussmann, Catastrophe Theory: A Preliminary Critical Study, a.a.O., S. 16 ff; Zeeman, Applications ... , a.a.O., S. 15; ders., Catastrophe Theory, a.a.O., S. 68.

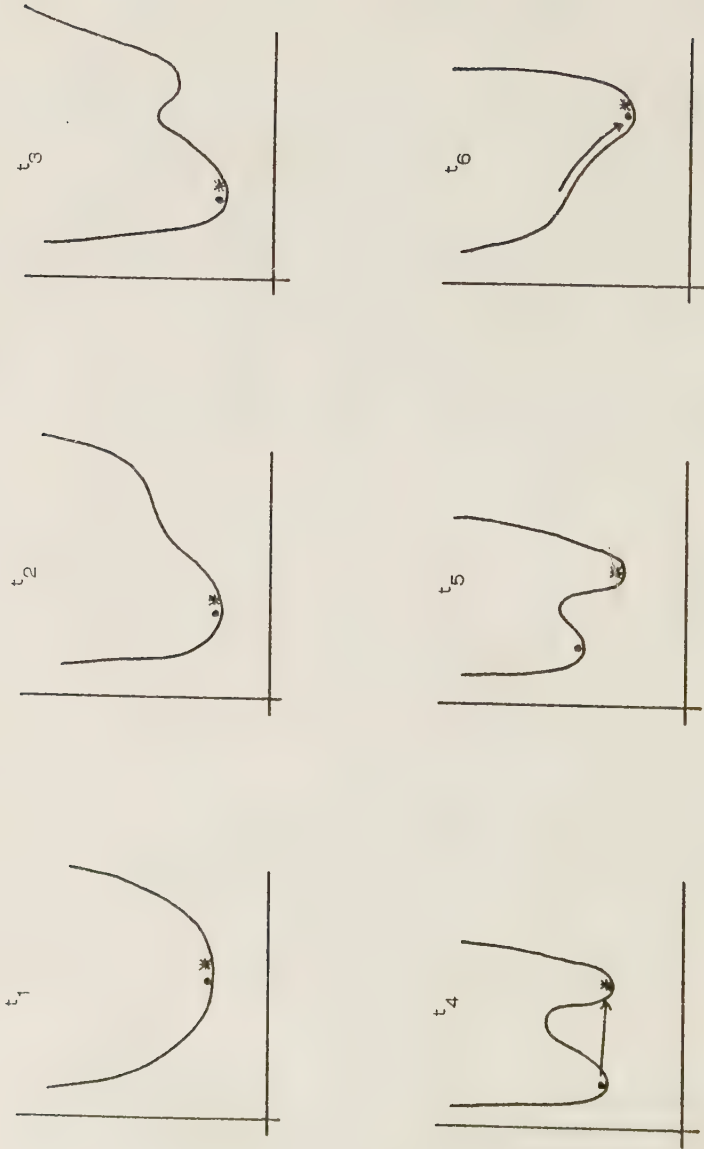


Abb. 3-8 Unterschiede bei globalem und lokalem Minimierungsverhalten

• = lokaler Minimierungspunkt, * = globaler Minimierungspunkt

Das Bild zeigt das Verhalten, das sich ergibt, wenn f variiert. Der globale Minimierungspunkt springt in t_4 nach rechts, sobald das rechte Minimum über das linke dominiert. Der lokale Minimierungspunkt verharret in t_4 und t_5 noch beim linken Minimum, da das "bessere" lokale Minimum nur über einen Weg erreicht werden kann, wo f zuerst zunimmt und dann abfällt. Erst in t_6 ist es möglich, sich nach rechts zu bewegen, ohne vorher "aufsteigen" zu müssen, so daß hier der Sprung nach rechts erfolgt.

In der Katastrophentheorie nennt man das lokale Minimierungsverhalten auch Verzögerungsregel (delay rule), während das globale Minimierungsverhalten auch Maxwells Regel heißt.¹⁾

Entsprechende Konzepte können für globales und lokales Maximierungsverhalten formuliert werden.

Ein weiteres interessantes Phänomen von Katastrophenmodellen ist die Divergenz. Betrachten wir etwa in einem Kuspensmodell²⁾ zwei Pfade, die beide in der Nähe des Ursprungs beginnen sollen und eng beieinander liegen. Bewegen sich beide in Richtung der positiven b -Achse, so entwickelt sich ein Pfad auf der unteren der andere auf der darüberliegenden Fläche,

1) Vgl. Isnard, Zeeman, Some Models from Catastrophe Theory in the Social Sciences, in: Collins (ed.), The Use of Models in the Social Sciences, London 1976, S. 44 - 100, S. 47 ff.

2) Siehe Abb. 3-3, S. 22.

d.h. jeder Pfad bewegt sich auf einer Seite des zweiwertigen Attraktors. Obwohl keine Diskontinuitäten während der Entwicklung auftreten und die Ausgangspunkte nebeneinander waren, führen die Pfade zu vollkommen verschiedenen Verhaltensweisen.¹⁾

1) Vgl. Zeeman, Applications ... , a.a.O., S. 16;
ders., Catastrophe Theory, a.a.O., S. 66 ff.

(4) Anwendungen der Katastrophentheorie

in den Sozialwissenschaften

- Ein Überblick -

Die meisten, bisher in der Literatur vorgestellten Anwendungen legen die Kuspel als Katastrophenmodell zugrunde. Wir geben einen kurzen Überblick einiger Anwendungen in den Sozialwissenschaften.¹⁾ Auf die Darstellung der vielfältigen Möglichkeiten von Modellformulierungen in anderen Realwissenschaften wurde hier verzichtet.²⁾ Es sei jedoch erwähnt, daß alle bisher in der Literatur diskutierten Ansätze weder numerisch spezifiziert noch empirisch überprüft wurden.³⁾

Bei den meisten Anwendungen wird die Potentialfunktion f nicht betrachtet. Bei den sozialen Phänomenen ist generell die zugrundeliegende Substanz und interne Dynamik sehr kompliziert, die Verhaltensdimension n kann so groß werden, daß die Potentialfunktion f nicht mehr ermittelt werden und konsequenterweise nur implizit vorhanden sein kann. Aus dem Klassifikationstheorem folgt beispielsweise, daß bei der Untersuchung der Effekte zweier Kontrollparameter im ungünstigsten Fall die Kuspelkatastrophe lokal eintreten kann, unabhängig von n . Die implizierte Katastrophenabbildung solch eines lokalen Punktes

1) Vgl. Zeeman, Applications ..., S. 16 ff.

2) Vgl. ebenda und dort angegebene Literatur.

3) Dies gilt auch für die Erklärungsmodelle für den Herzschlag und den Nervenimpuls, vgl. Sussmann, Zahler, Catastrophe Theory as Applied to the Social and Biological Sciences: A Critique, in: Synthese 37 (1978), S. 117 - 216, S. 183.

muß aber dem 3-dimensionalen Kusenmodell äquivalent sein, so daß auch ein 1-dimensionales Verhaltensspektrum für explizite Erklärungs- und Vorhersagemodelle benutzt werden kann. Im 3-dimensionalen Modell gibt es allerdings keine bedeutsame Potentialfunktion, die das Verhalten bestimmt; dennoch beschreibt das Modell abrupte Verhaltensänderungen so, als wenn die Potentialfunktion vorhanden wäre.¹⁾

(41) Modelle der Kusenkatastrophe

(a) Aggression

Als beeinflussende Faktoren werden Wut und Angst betrachtet. Die Verhaltensachse stellt ein kontinuierliches Spektrum vom Angriff bis zur Flucht dar. Tritt Wut alleine auf, führt dies zum Angriff, nur Angst veranlaßt zur Flucht. Neutrales Verhalten ergibt sich, wenn weder Wut noch Angst vorhanden sind. Ist sowohl Wut als auch Angst vorhanden, kann Angriff oder Flucht folgen, je nachdem welcher Kontrollparameter dominiert.²⁾ Der plötzliche Angriff oder die plötzliche Flucht können im Kusenmodell als Katastrophe interpretiert werden. Zeeman hat ein solches aggressives Verhalten am Beispiel eines Hundes qualitativ beschrieben³⁾, an anderer Stelle⁴⁾ vertritt

1) Vgl. Zeeman, Applications ... , a.a.O., S. 16.

2) Siehe die Ausführungen über Divergenz, S. 33.

3) Vgl. Zeeman, Catastrophe Theory, a.a.O., S. 65 ff.

4) Vgl. ders., Applications ... , a.a.O., S. 16 f.

er die Ansicht, daß dieses Modell psychologischen Messungen zugänglich sei, da dort Teile des Gehirns explizit beschrieben werden und neurologische und psychologische Phänomene verbunden seien.¹⁾ Entsprechende Experimente sind aber bisher nicht veröffentlicht.

(b) Gefängnisunruhen²⁾

Die plötzlich ausbrechenden Unruhen in Gefängnissen können durch ein Kuspensmodell beschrieben werden.

Verhaltensvariable sind die unterschiedlichen Ausprägungen des kollektiven Verhaltens von Ruhe bis zum Aufruhr.

Als beeinflussende Kontrollparameter werden betrachtet:

- als Normalfaktor: Spannungen (Frustrationen, Bedrängnis)
- als Splittingfaktor: Entfremdung (Trennung, Kommunikationsmangel, Polarisierung),

und zwar mit folgenden Wirkungen: Je größer die Spannungen, um so größer die Unruhen; je mehr Entfremdung, um so un-
vermittelter und gewalttätiger brechen Unruhen aus.

1) Zeeman vermutet, daß die implizite Verhaltensfunktion vom Typ einer Duffing Gleichung ist, vgl. Zeeman, Brain Modelling, in: Hilton (ed.), a.a.O., S. 367 - 372, S. 368 f und dort angegebene Literatur.

2) Vgl. Zeeman, Prison Disturbances, in: Hilton (ed.), a.a.O., S. 402 - 408; Zeeman, Hall, Harrison, Marriage, Shapland, A Model for Institutional Disturbances, in: British Journal of Mathematical and Statistical Psychology 26 (1976), S. 66 - 80.

Das Modell wurde formuliert nach einer Analyse von Daten des Gantree Gefängnisses aus dem Jahr 1972. Es wurden 25 Indizes über ein Jahr lang wöchentlich erfaßt. Durch eine Faktorenanalyse wurden zwei Hauptfaktoren: Spannung und Entfremdung ermittelt. Diese Faktoren interpretieren Zeeman et. al. als Kontrollparameter. In der Ebene abgetragen, zeigen diese zwei Kuppen. Die Verschiebung der Kuppe im Zeitablauf wird durch einen erhöhten Toleranzlevel erklärt.¹⁾

(c) Komiteeverhalten²⁾

Als Verhalten betrachten wir die Entscheidung eines Komitees für oder gegen eine bestimmte Maßnahme. Der Normalfaktor ist die unterstützende Aktion der Befürworter, der Splittingfaktor die Reaktion der Opponenten. Das Prinzip der Divergenz zeigt die Bedeutung der ersten Einstellung des Komitees. Eine Katastrophe tritt bei einem plötzlichen Umschwung der Meinungen des Komitees ein.

Mit dem Modell kann der überraschende Umschwung erklärt werden nach einer Abstimmung gegen eine Maßnahme, diese

1) Vgl. Zeeman, Hall et. al., a.a.O., S. 73; siehe auch die Kritik Sussmanns in: Catastrophe Theory: A Preliminary Critical Study, a.a.O., S. 26 f.

2) Vgl. Zeeman, Applications ..., a.a.O., S. 17.

nun zu favorisieren. In der Kontrollparameterebene könnte ein solches Verhalten auf folgendem Weg zustande kommen (Abb. 4-1).

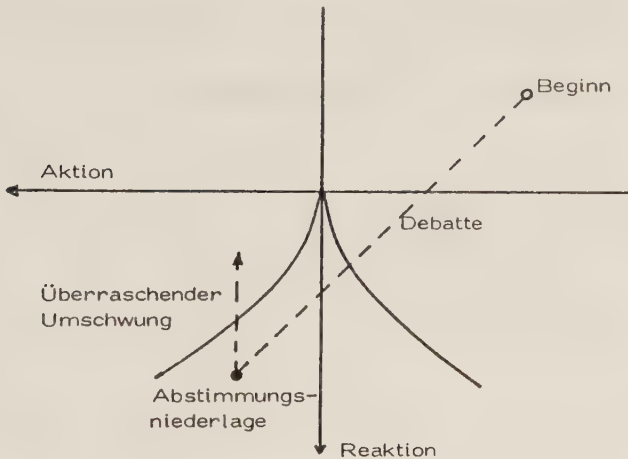


Abb. 4-1

(d) Verteidigungspolitik¹⁾

Als Normalfaktor wird die territoriale Bedrohung angesehen, während die Kosten eines "Verteidigungsfalles" den Splittingfaktor darstellen, er teilt die Nation und die Regierung in Tauben und Falken. Hier werden die Individuen repräsentiert

1) Vgl. Isnard, Zeeman, a.a.O., S. 45 ff.
Das Modell wird auch erweitert auf die Schmetterlingskatastrophe, siehe unten.
Siehe auch die Kritik Sussmanns, Catastrophe Theory: A Preliminary Critical Study, a.a.O., S. 18 ff.
Hier nach Zeeman, Applications ..., a.a.O., S. 17 f.

durch Punkte auf dem Attraktor. Die Position jedes Punktes hängt ab von der individuellen Einschätzung von Bedrohung und Kosten. Eine individuelle Einstellungsänderung wird durch eine Katastrophe dargestellt. Wenn viele Leute sich einer zunehmenden Bedrohung bewußt werden, kann die Nation eine plötzliche nationale Aufwallung erfahren. Umgekehrt kann eine plötzliche Defätismuswelle eintreten.

(42) Modelle der Schmetterlingskatastrophe

(a) Verteidigungspolitik ¹⁾

Das oben beschriebene Modell ²⁾ wurde wie folgt erweitert:

Normalfaktor	=	Territoriale Bedrohung
Splittingfaktor	=	Kosten pro "Verteidigungsfall"
Verzerrungsfaktor	=	Politische Neigung (rechts oder links)
Schmetterlingsfaktor	=	Zeit.

Für $t < 0$ polarisieren sich in diesem Modell die Meinungen entsprechend der Kuppe, bei einer rechten politischen Neigung zu den Falken, bei einer linken zu den Tauben.

Für $t > 0$ erscheint im Mittelpunkt des politischen Spektrums eine zunehmende Tasche von Kompromißmeinungen, die scharf von Tauben und Falken getrennt ist. Je nach politischem Ausschlag kann sich dieser Kompromiß auf die Seite der

1) Vgl. Isnard, Zeeman, a.a.O., S. 77 ff und Zeeman, Catastrophe Theory, a.a.O., S. 80.

2) Siehe oben

Falken oder Tauben verschieben.¹⁾

(b) Oppositionsverhalten gegenüber einer Regierung²⁾

Wir wollen das Oppositionsverhalten einer Bevölkerung gegenüber ihrer Regierung untersuchen. Das Verhalten soll verschiedene Formen annehmen: von Wahlspenden für die Regierungspartei bis zur Vorbereitung eines Guerillakrieges gegen die Regierung, wobei mit dem hier beschriebenen Modell lediglich das kritische Verhalten gegenüber einer Regierung erklärt werden soll: von neutraler Einstellung bis zur Streikvorbereitung.

Als beeinflussende Faktoren sehen Isnard und Zeeman an:

Normalfaktor	=	Ökonomische Malaise ³⁾
Splittingfaktor	=	Reformversprechen
Verzerrungsfaktor	=	Mißlingen von Reformen
Schmetterlingsfaktor	=	Druck (pressure).

Die Reformversprechen haben einen Splittingeffekt, da es sowohl Befürworter als auch Gegner bestimmter Vorhaben gibt. Mißlingen angekündigte Reformen, wird sich die öffentliche Meinung gegen die Regierung wenden. Dies kann

1) Vgl. Zeeman, Applications ... , a.a.O., S. 22.

2) Vgl. Isnard, Zeeman, a.a.O., S. 86 ff.

3) Gemeint sind: chronische Inflation, Unterbeschäftigung, Zahlungsbilanzschwierigkeiten usw.

bis zu Streikaktionen gegen die Regierung führen, die dann die langfristigen ökonomischen Pläne zur wirtschaftlichen Erholung durchkreuzen. Es kann dann zu einem Druck der Regierung gegen die Bevölkerung kommen, um die Mehrheitsmeinung zurückzugewinnen. Dieser Druck kann zur Bildung eines Extremistenflügels führen. Die Tasche des Modells eröffnet aber nun kein Kompromißverhalten, sondern repräsentiert eher die "schweigende Mehrheit in der Opposition", während Befürworter und totale Opposition die beiden Extrempositionen des Verhaltens darstellen.

(5) Anwendungen in den Wirtschaftswissenschaften

Die Katastrophentheorie kann auf Strukturen in verschiedenen Niveaustufen angewandt werden.¹⁾ Die Stufen sind hierarchisch geordnet und jede höhere Stufe hat zusätzliche Einschränkungen in der Allgemeinheit gegenüber der vorhergehenden.

Zeeman²⁾ unterscheidet sechs verschiedene Stufen, die wir hier zu drei zusammenfassen wollen:

Stufe 1: Singularitäten

Stufe 2: Dynamik

Stufe 3: Diffusion.

Die Klassifikation der Elementarkatastrophen, wie sie von Thom vorgenommen wird, und die Anwendungen des Theorems auf reale Tatbestände sind der Stufe 1 zuzuordnen. Auf dieser Stufe sind lediglich qualitative Aussagen über das Verhalten eines Systems möglich.

Wenn wir zusätzliche Annahmen über das Verhalten des Systems machen, sind dies Anwendungen der 2. Stufe.³⁾ Zunächst betrachten wir in der Stufe 2 die kritische Menge $C(f)$ als Attraktor, d.h. das System strebt "schnell" zu

1) Vgl. Zeeman, Levels of Structure in Catastrophe Theory Illustrated by Applications in the Social and Biological Sciences, in: Proceedings of the International Congress of Mathematics, Vancouver 1972, Vol. 2, S. 533 - 546.

2) Vgl. ebenda, S. 534 ff.

3) Vgl. ebenda.

Punkten dieser Menge. Weiter nehmen wir an, daß eine "langsame" Entwicklung definiert ist, entweder durch die Zeit als besonderen Parameter (Zeeman spricht von Entwicklung) oder als Rückkoppelung der internen Variablen auf die Parameter. Diese Einschränkungen bezüglich der ersten Stufe können durch gewöhnliche Differentialgleichungen beschrieben werden.

In Stufe 3 wird zusätzlich eine partielle Differentialgleichung eingeführt, welche die Durchdringung (Diffusion) eines Mediums repräsentieren soll. Diese Stufe ist vornehmlich für naturwissenschaftliche Anwendungen relevant.

Wir wollen vor allem für die zweite Stufe mögliche Anwendungen in den Wirtschaftswissenschaften diskutieren, wobei wir uns in der Regel auf qualitative Untersuchungen von ökonomischen Phänomenen beschränken wollen. Die numerische Spezifikation von Modellen und deren empirische Überprüfung wurde bisher für katastrophentheoretisch formulierte Modelle weitgehend vernachlässigt. Die in der Literatur beschriebene Anwendung bei einem Modell zur Weiterleitung des Nervenimpulses wird sehr kritisiert, zumal bessere Erklärungsmodelle für dieses Phänomen vorhanden sind.¹⁾

Die Anwendung der ersten Stufe führt zu einer sehr allgemeinen Aussage, wie sie auch das Klassifikationstheorem

1) Vgl. Sussmann, Zahler, a.a.O., S. 162 ff.

liefert. Es gilt nämlich:

In einem betrachteten System hängt die Anzahl möglicher Katastrophen allein von der Anzahl der Parameter ab, und zwar entsprechend dem Klassifikationstheorem von Thom. Die Formen der möglichen Katastrophen sind den Elementarkatastrophen äquivalent.

Diese allgemeine Aussage gilt für alle Systeme, jedoch können wir damit nicht feststellen, welche Formen von Katastrophen in einem System realiter auftreten oder ob überhaupt aus der Sicht der Realwissenschaft, also hier der Wirtschaftstheorie, plötzliche Verhaltensänderungen möglich sind, die durch Katastrophen beschrieben werden können.

Dennoch können unter diesem Gesichtspunkt Verhaltensannahmen in den Wirtschaftswissenschaften untersucht werden, um neue Erkenntnisse zu gewinnen. Wir werden unsere wirtschaftstheoretischen Hypothesen auch unter diesem Aspekt betrachten.

Die Anwendung der Stufe 2 setzt ein dynamisches Modell voraus. Die Wirtschaftstheorie arbeitet vorwiegend mit dynamischen Modellen, die wir nun katastrophentheoretisch untersuchen. Wir wählen aus der Vielzahl möglicher Betrachtungen Modelle individuellen Nachfrageverhaltens und zum Lohnfindungsprozeß aus.

Neben den Modellen, die in Differentialgleichungen dargestellt

werden können, interessieren häufig komperativ-statische Modelle. Auch diese können mit Methoden der Katastrophen-theorie auf Stabilität untersucht werden.

Bevor wir uns detailliert den ökonomischen Modellen zuwenden, wollen wir einige Bemerkungen zu qualitativen Aussagen machen. Obwohl die Quantifizierung und numerische Spezifizierung oft als letztes Ziel einer Wissenschaft angesehen werden, auch die Wirtschaftstheorie entwickelt sich zu einer "numerischen Theorie" im Sinne Schumpeters, vor allem durch die Fortschritte der Ökonometrie ¹⁾, können auch qualitative Untersuchungen von wirtschaftlichen Phänomenen Aspekte aufzeigen, die zu wirtschaftstheoretischen Erkenntnissen führen können. Die Möglichkeiten der Katastrophentheorie, hierzu einen Beitrag zu leisten, würdigen wir kritisch in Kapitel (6).

1) Vgl. Stöwe, Ökonometrie, Meisenheim am Glan 1977, S. VII und S. 1 ff.

(51) Die Bedeutung qualitativer Aussagen

Die Verwendung des Ausdrucks "qualitativ" hat in der Wissenschaft einen schlechten Klang.¹⁾ Aber betrachten wir dazu folgendes Beispiel: die empirische Untersuchung eines Phänomens ergebe einen Graph g mit der Gleichung

$$y = g(x).$$

Zur Erklärung stehen zwei Theorien zur Verfügung, die folgende Graphen liefern

$$y = g_1(x) \quad \text{und}$$

$$y = g_2(x).$$

In der (x,y) -Ebene ergebe sich folgendes Bild:

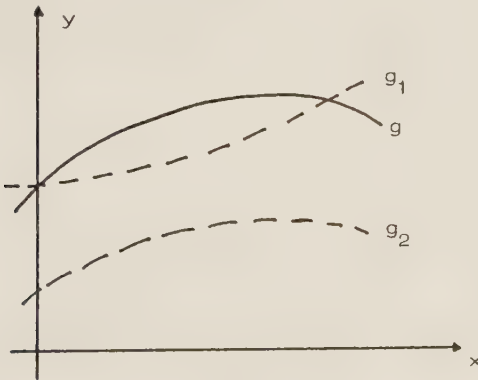


Abb. 5-1

1) Vgl. Thom, a.a.O., S.4, der Rutherford zitiert:
"Qualitative is nothing by poor quantitative."

Keiner dieser beiden Graphen paßt sich $g(x)$ gut an.
Unter quantitativen Gesichtspunkten ist $g_1(x)$ besser geeignet, da über dem betrachteten Intervall gilt

$$\int |g - g_1| < \int |g - g_2|,$$

jedoch hat g_2 den gleichen Verlauf wie g .

In dieser Situation würde man die zweite Theorie als geeigneter betrachten trotz des größeren quantitativen Fehlers, da die dem Phänomen zugrundeliegende Dynamik, wie sie sich in den empirisch gemessenen Daten zeigt, durch g_2 besser erklärt werden kann als durch das quantitativ exaktere g_1 . Dies soll die Denkweise illustrieren, wie sie in katastrophentheoretischen Modellen vorherrscht.¹⁾

Die qualitativen Aussagen werden aus Ordnungs- und differentialtopologischen Strukturen abgeleitet. Um den Begriff "qualitativ" zu präzisieren, definieren wir:

"Seien X, X' zwei Skalen, die dieselben Daten beschreiben. Wir sagen, daß der Übergang von Skala X zu X' , und von X' zu X qualitativ sind, wenn beide sowohl glatt als auch ordnungserhaltend sind. In diesem Fall sagen wir, daß die zwei Skalen in qualitativer Relation stehen."²⁾

1) Vgl. Thom, a.a.O., S. 4 f (Siehe auch die Bemerkungen zur geschichtlichen Entwicklung der Physik, S. 5 f).

2) Isnard, Zeeman, a.a.O., S. 62; zur Präzisierung der Äquivalenz von Graphen vgl. ebenda, S. 65 ff.

Daraus folgt, daß auch nicht-lineare Veränderungen der Skalen möglich sind, wenn die Ordnungs- und topologische Struktur erhalten bleibt, was nicht für quantitative (resp. algebraische) Strukturen gelten muß.

Neben den qualitativen Aussagen, welche die sozialen Wissenschaften bisher machen konnten und die meist nicht mathematisch formuliert waren¹⁾, können mit der Katastrophentheorie neue Verhaltensweisen dargestellt werden, und zwar in einer neuen mathematischen Sprache (mit Ausdrücken wie: Falte, Kuspel, Divergenz, Normalfaktor, Splittingfaktor usw.), die nicht in eine vertraute Umgangssprache übersetzt werden kann und aufgrund eindeutiger Definitionen (mathematisch präzise) Strukturen²⁾ sozialwissenschaftlicher Erkenntnisobjekte beschreiben kann.³⁾

1) Meistens sind sie in "Je ... desto ..." -Sätzen formuliert und nicht in der Form: ... ist eine zunehmende (abnehmende) Funktion von

2) Gemeint sind vor allem Ordnungsstrukturen.

3) Vgl. Isnard, Zeeman, a.a.O., S. 64 f.

(52) Verhaltensannahmen in den Wirtschaftswissenschaften

Ökonomische Modelle bestehen aus einem Gleichungskomplex, in dem wirtschaftstheoretische Einsichten die funktionalen Zusammenhänge festlegen.¹⁾ Ökonomische Modelle können aus folgenden Beziehungen bestehen:

- "a) Definitionen (einschließlich Bilanzgleichungen), Gleichgewichtsbedingungen und
- b) Reaktionsgleichungen (Verhaltensgleichungen), institutionelle Gleichungen sowie technische Gleichungen"²⁾.

Während Definitionen nach Nützlichkeitsgesichtspunkten ausgewählte Identitäten sind und Gleichgewichtsbedingungen aus theoretischen Überlegungen abgeleitete Bedingungsgleichungen darstellen, beschreiben Reaktionsgleichungen das Verhalten von Wirtschaftssubjekten auf gegebene Bedingungen.³⁾

Wenn wir nicht das Gesamtmodell katastrophentheoretisch untersuchen, etwa auf Stabilitätsverhalten, können wir zur Formulierung katastrophentheoretischer Beziehungen nur bei den Reaktionsgleichungen, auch Verhaltensgleichungen genannt, ansetzen.

1) Vgl. Stöwe, Ökonometrie, a.a.O., S. 10 f.

2) Ebenda, S. 40.

3) Vgl. ebenda, S. 40 ff.

Beim oben beschriebenen Modell des Börsenmarktes finden wir diese Gleichungsformen nicht explizit wieder. Die Beziehungen des Modells lassen sich aber ohne Schwierigkeiten einteilen in:

Reaktionsgleichungen; nämlich das Verhalten der Fundamentalisten und Chartisten auf Indexvariationen, dies wird einerseits repräsentiert durch die besondere Form des Attraktors S andererseits durch die "langsamen" Richtungsänderungen auf dem Attraktor (den Rückkoppelungseffekten); ¹⁾

und

Gleichgewichtsbedingungen; nämlich durch die Annahme, daß alle Punkte im betrachteten Raum "sehr schnell" auf die Gleichgewichtsfläche zustreben, auf diesem Attraktor ist die Veränderung des Indexes konstant ($\dot{J} = 0$). ¹⁾

Bevor wir weitere Beispiele für katastrophentheoretische Verhaltensannahmen beschreiben, wollen wir die mathematischen Implikationen der Katastrophentheorie auf ihre Brauchbarkeit bei der Beschreibung ökonomischen Verhaltens untersuchen.

1) Siehe oben, S. 9 ff.

(521) Implikationen bei katastrophentheoretisch formulierten

Verhaltensannahmen

Bei der Formulierung des Klassifikationstheorems sind wir von Systemen ausgegangen, die ein lokales Minimierungs- oder Maximierungsverhalten zeigen.¹⁾ Zur Beschreibung dieses Verhaltens haben wir eine Gradientengleichung²⁾ verwendet.

Wollen wir katastrophentheoretisch formulierte Systeme für Verhaltensannahmen in ökonomischen Modellen verwenden, dürfen die Hypothesen der Katastrophentheorie nicht zu Widersprüchen mit beobachtbaren menschlichen Verhaltensweisen führen. Wir fragen uns also, ist lokales Extremalverhalten, wie es solche Systeme zeigen, geeignet menschliches Verhalten zu beschreiben?

Annahmen über menschliches Verhalten müssen vom zielorientierten Handeln der Individuen ausgehen. Die Zielorientierung kann mathematisch als Minimierungs- oder Maximierungsvorschrift einer Funktion, die das Verhalten repräsentiert, angesehen werden, wobei in der Regel Nebenbedingungen zu beachten sind. Die Extremalpunkte können auf zwei verschiedene Arten erreicht werden. Diese haben wir oben als lokales und globales Minimierungs- oder Maximierungsverhalten bezeichnet.³⁾

1) Vgl. oben S. 40 und S. 47 ff.

2) Das Differentialgleichungssystem ergibt sich aus den ersten Ableitungen der Potentialfunktion.

3) Vgl. oben S. 47 ff.

Meist wird in der Wirtschaftstheorie vom globalen Minimierungs- oder Maximierungsverhalten (Maxwell-Regel) ausgegangen.

Man nimmt also an, daß ein globaler Extremalwert, der optimale Zielwert, sofort erreicht wird, gleichgültig wie entfernt der Ausgangspunkt von der Lösung ist und welcher Weg zurückgelegt werden muß.

Beim lokalen Minimierungs- oder Maximierungsverhalten (Verzögerungsregel) wird dagegen immer nur der Extremalwert realisiert, der "ohne Überwindung von Hindernissen" erreicht werden kann. Dieser lokale Extremalwert muß nicht der optimale Zielwert sein, wie er nach der Maxwell-Regel sofort erreicht wird.

Wir wollen im folgenden vom lokalen Minimierungs- oder Maximierungsverhalten bei der Betrachtung der Verhaltensweisen von Wirtschaftssubjekten ausgehen und rechtfertigen diese Annahme mit folgenden Gründen: Mangel an Informationen, Intuition, soziale Abhängigkeiten, Trägheit und Vergangenheit.¹⁾

- Die fehlenden Informationen führen zu Unsicherheiten im Verhalten, so daß ein Individuum meist nicht gewillt ist, sein Verhalten vollkommen zu ändern, um ein Ziel zu erreichen, daß von der Ausgangssituation weit entfernt ist. Da über das angestrebte Ziel und die Bedingungen, wie es erreicht werden kann, nur unvollkommene Informationen vorliegen, werden meist kleine Schritte gewählt, die in der Nähe des Ausgangsverhaltens liegen

1) Vgl. Isnard, Zeeman, a.a.O., S. 51 ff.

und sukzessiv zum Ziel führen. Plötzliche Verhaltensänderungen erscheinen dann, wenn das sukzessive Vorgehen ungehindert fortgesetzt werden kann, so daß in einer kurzen Zeitspanne viele "kleine Schritte" auf das Ziel möglich sind.

- Die Untersuchung der Umgebung des Ausgangszustandes auf mögliche Alternativen, ohne eine globale Analyse der Zusammenhänge, und die Auswahl der geeigneten Vorgehensweise bezeichnen wir als Intuition. Dieses Verhalten ist vor allem bei Entscheidungen unter großem Zeitdruck zu beobachten.
- Die sozialen Abhängigkeiten der Individuen in einer Gesellschaft äußern sich in den Verhaltenserwartungen an die Individuen. Streben diese neue Ziele an, die Idealerweise mit einer plötzlichen Verhaltensänderung erreichbar wären, müssen unter Umständen soziale Sanktionen in Kauf genommen werden. In der Regel will aber das Individuum solche Sanktionen vermeiden, so daß nur eine Verhaltensänderung in "kleinen Schritten", also in der Nähe des Ausgangszustandes beginnend, vorgenommen werden kann.
- Durch Parametervariation können, auch bei kleinen Veränderungen, immer neue Extrempunkte auftreten. Das kann bei globalem Minimierungsverhalten¹⁾ dazu führen, daß immer neue globale Minima angestrebt werden.

1) Entsprechend für globales Maximierungsverhalten.

Das Verhalten kann sich ständig ändern. Ergeben sich z.B. immer abwechselnd zwei globale Minima im Zeitablauf, wird auch abwechselnd das Verhalten geändert. Beim lokalen Minimierungsverhalten dagegen kann es sein, daß die wechselnden Minima nicht zu Verhaltensänderungen führen, da der Übergang von einem Minimum zu einem anderen "behindert" ist; d.h. das Verhalten bleibt über längere Zeit konstant. Diese Trägheit kann im menschlichen Verhalten oft beobachtet werden.

- Das gegenwärtige Verhalten wird ebenfalls durch das Verhalten in der Vergangenheit bestimmt. Die Maxwell-Regel ¹⁾ vernachlässigt den Einfluß der Vergangenheit auf das Verhalten völlig, während die Verzögerungsregel dies in Rechnung stellt.

Nach diesen Ausführungen steht die Verzögerungsregel also nicht im Widerspruch zum beobachteten menschlichen Verhalten in der Gesellschaft. Auf diese Weise formulierte Verhaltensfunktionen können damit auch in der Wirtschaftstheorie betrachtet werden.

1) Globales Minimierungs- oder Maximierungsverhalten.

Ein weiteres Phänomen katastrophentheoretischer Modelle ist die Divergenz, die aus der Mehrwertigkeit der Verhaltensfunktion folgt.¹⁾

Eine bestimmte Parameterkonstellation kann in einem solchen Modell zu vollkommen verschiedenen Verhalten führen. Welches Verhalten verwirklicht wird, hängt von dem Weg ab, der auf dem Attraktor zurückgelegt wird. Daß menschliches Verhalten nicht ohne Kenntnis der Vergangenheit erklärt werden kann, haben wir oben bereits festgestellt. Mit katastrophentheoretischen Modellen kann nun verschiedenes Verhalten bei gleicher Parameterkonstellation abhängig von vorangegangenen Parameterkonstellationen, die das Verhalten der Vergangenheit bestimmten, erklärt werden.

Auch dieses Phänomen widerspricht nicht den Beobachtungen menschlichen Verhaltens.

(522) Katastrophentheoretische Modelle individuellen

Nachfrageverhaltens

Die mikroökonomische Haushaltstheorie leitet die Güternachfrage aus Indifferenzkurvensystemen von ordinalen Nutzenfunktionen

1) Vgl. oben S. 49.

ab.¹⁾ In der Regel erhalten wir stetige Funktionen in einer Einflußgröße (Preis des Gutes, Preis anderer Güter, Einkommen), wobei die anderen beeinflussenden Faktoren konstant gesetzt werden (ceteris paribus-Klausel). Mögliche Diskontinuitäten in speziellen Nachfragefunktionen werden dabei weitgehend ausgeschlossen. Mit Hilfe der Katastrophentheorie lassen sich nun spezielle Nachfragefunktionen entwickeln, die abrupte Änderungen im Nachfrageverhalten erklären.

Die Abhängigkeit der Güternachfrage eines Haushaltes vom Einkommen wird in der mikroökonomischen Theorie durch eine steigende, stetige Funktion erklärt, wobei wir hier vom Spezialfall inferiorer Güter absehen, die zu fallenden Funktionen führen. In der makroökonomischen Theorie finden auch Hypothesen Anwendung, die sich mit diesem Ansatz nur schwer vertragen, etwa eine Hypothese von Modigliani-Duesenberry. Diese besagt, "daß die Verbrauchsausgaben eines Konsumenten nicht allein von seinem laufenden Einkommen abhängig sind, sondern ebenso sehr von der Höhe seines letzten Maximaleinkommens bestimmt werden"²⁾. Der Lebensstandard des Verbrauchers geht damit in das Konsumverhalten mit ein, nämlich derart, daß bei sinkendem Einkommen die bisherigen Konsumgewohnheiten

1) Vgl. Lehrbücher der Mikroökonomie, etwa Luckenbach, Theorie des Haushaltes, Göttingen 1975, S. 54 ff, wo man auch ausführliche Literaturhinweise findet.

2) Vgl. hierzu Stöwe, Ökonometrie und makroökonomische Theorie, Stuttgart 1959, S. 97 f und dort angegebene Literatur.

zunächst beibehalten werden. Dieses Verhalten kann aber nicht beliebig lange fortgesetzt werden, wenn das Einkommen weiter sinkt. Wenn wir dieses Verhalten auf einen Haushalt beziehen und die Nachfrage nach einem hochwertigen¹⁾ Konsumgut betrachten, so soll die Nachfrage nach diesem Gut bei Unterschreitung einer kritischen Einkommensgrenze y_1 ceteris paribus abrupt sinken. Umgekehrt sei bei steigendem Einkommen die Beibehaltung der Konsumgewohnheiten für dieses Gut über y_1 hinaus wahrscheinlich; erst wenn ein Einkommen y_2 überschritten wird, nehme die Nachfrage nach diesem Gut plötzlich zu. Analytisch führt dies zu einer zweiwertigen Relation der mengenmäßigen Nachfrage x im Bereich zwischen y_1 und y_2 unter gegebenen Bedingungen. Wir können dies wie folgt graphisch darstellen:

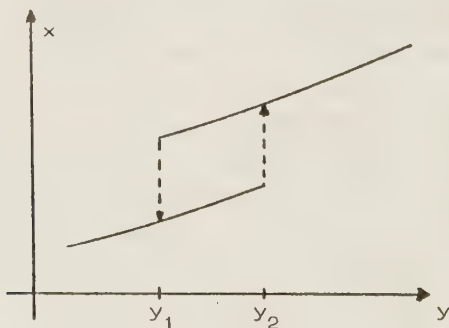


Abb. 5-2

1) Im Sinne der individuellen Nutzeinschätzung.

Wegen der Zweiwertigkeit bei bestimmten Einkommen können wir nur Aussagen über das Konsumverhalten machen, wenn wir wissen, wie sich das Einkommen in der Vergangenheit entwickelt hat. Dieses Phänomen entspricht der Divergenz in katastrophentheoretischen Modellen.

Beim Überschreiten einer kritischen Einkommensgrenze (y_1 oder y_2) tritt eine plötzliche Änderung des Konsumverhaltens ein; eine Katastrophe, wie wir sie oben beschrieben haben.

Um das Modell zu vervollständigen, beziehen wir die Preisabhängigkeit der Nachfrage in gewohnter Form in die Analyse ein. Unter Vernachlässigung des Giffen-Falls nehmen wir an, daß die Nachfrage nach einem Gut bei steigenden Preisen p fällt.

Wir suchen eine Funktion

$$f(y, p; x),$$

die das oben beschriebene Verhalten richtig wiedergibt. $f(y, p; x)$ ist eine Funktion in einer Variablen und zwei Parametern. Wenn wir annehmen, daß die Voraussetzungen für das Klassifikationstheorem von Thom gelten, ergibt sich nach diesem Theorem, daß nur zwei Elementarkatastrophen auftreten können; nämlich solche, die der Falte oder der Kuspel äquivalent sind.¹⁾

1) Diese Aussage entspricht der Anwendung von Stufe 1, siehe oben, S. 59 ff.

Um das Klassifikationstheorem anwenden zu können, sind wir von generischen Funktionen ausgegangen.¹⁾ Da jede kontinuierliche Funktion beliebig nahe durch glatte, generische Funktionen approximiert werden kann²⁾, können wir für die hier betrachteten Verhaltenshypothesen annehmen, daß f zumindest durch eine generische Funktion in diesem Sinne³⁾ angenähert werden kann.

Dann ist die kritische Menge der Lösungsmenge der Gleichung

$$x^3 - (y - y_0) - (p - p_0)x = 0$$

äquivalent. Dabei ist (y_0, p_0) der "Ursprung" der Kuspel, d.h. dies ist der Anfangspunkt der beiden Kuspeläste, bei deren Überschreiten diskontinuierliches Verhalten auftritt.

Diesen "Standardvertreter der Äquivalenzklasse" können wir im dreidimensionalen Raum in bekannter Weise darstellen. (Abb. 5-3).

1) D.h. $f \in \tilde{f}_0$ mit $\tilde{f}_0 \subset \tilde{f}$, wobei $\tilde{f}$ eine offene, dichte Menge der glatten Funktionen auf $\mathbb{R}^3$ mit einer Whitney C^∞ -Topologie ist.

2) Vgl. Isnard, Zeeman, a.a.O., S. 97 Anm. 1.

3) Siehe oben, S. 44.

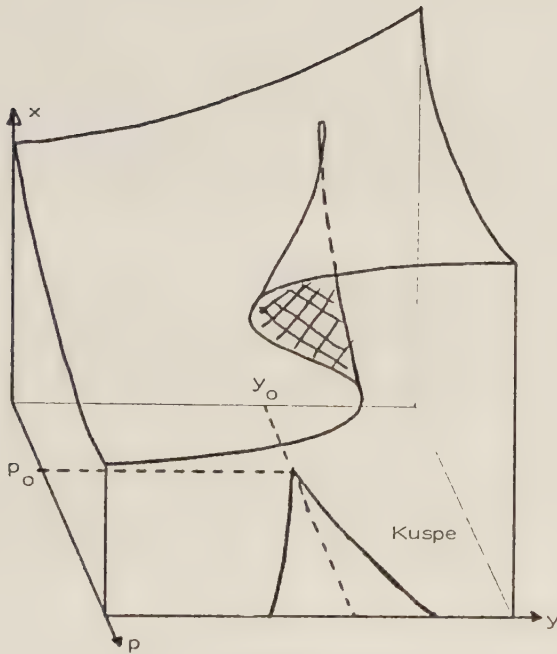


Abb. 5-3

In der Sprache der Katastrophentheorie ist y der Normalfaktor und p der Splittingfaktor, da er oberhalb des Preises p_0 in einem bestimmten Bereich die Nachfrage in zwei mögliche Ausprägungen teilt. Die Kuspe in der (y, p) -Ebene zeigt die Preis-Einkommen-Kombinationen, bei denen die Nachfragefunktion mehrwertig ist.

Die Kuppe ist gegeben durch die Gleichung:

$$4(p - p_0)^3 = 27(y - y_0)^2.$$

Dort ist die betrachtete Nachfragefunktion dreiwertig. Uns interessieren aber lediglich die beiden "äußeren" Flächen. Die schraffierte Fläche (der Repellor), welche der Bedingung

$$3x^2 < (p - p_0)$$

genügt, stellt keine Nachfrage dar, die über längere Zeit unter diesen Bedingungen aufrecht erhalten werden kann.

Die kritische Menge wollen wir wieder als Attraktor betrachten, d.h. außerhalb des Attraktors liegende Punkte streben sehr schnell auf den Attraktor und repräsentieren dort die nachgefragte Menge, abhängig von den gegebenen Bedingungen.

Als "schnell reagierende" Differentialgleichung in einem Differentialgleichungssystem stellen wir den Attraktor wie folgt dar:¹⁾

$$\epsilon \dot{x} = -[x^3 - (y - y_0) - (p - p_0)x].$$

Durch einen kleinen Wert von ϵ ²⁾ erreichen wir, daß Punkte, die außerhalb der kritischen Menge liegen, "schnell"

1) Vgl. auch Zeeman, Differential Equations for the Heartbeat and the Nerve Impulse, in: Peixoto (ed.), Dynamical Systems, New York, London 1973, S. 683 - 741, S. 706 ff.

2) $\epsilon > 0$.

auf den Attraktor streben. Je kleiner ε , um so schneller wird der Attraktor erreicht.

Auf diese Weise können wir das Nachfrageverhalten dynamisch beschreiben. Die oben eingeführte Differentialgleichung ist allerdings nur Teil eines Systems; denn für die Variablen: Preis und Einkommen müssen ebenfalls Hypothesen formuliert werden.

Nehmen wir an: das oben beschriebene Verhalten sei repräsentativ für die Nachfrage auf einem Teilmarkt, so können wir z.B. die Variable Preis als internen Parameter dieses Marktmodells betrachten. Deren Verhalten kann durch eine weitere Differentialgleichung beschrieben werden.

Dagegen wollen wir das Einkommen als exogene Größe betrachten, d.h. die Erklärung des Einkommens erfolgt außerhalb des Modells; der Wert der Variablen wird "von außen" vorgegeben.

Eine Hypothese für das Preisverhalten kann auf der Diskrepanz zwischen Angebot und Nachfrage aufbauen. Übersteigt das Angebot die Nachfrage, soll der Preis fallen, um so einen Ausgleich zwischen Angebot und Nachfrage herbeizuführen, et vice versa.

Dazu können wir z.B. von einer einfachen Angebotshypothese ausgehen, die durch folgende Gleichung repräsentiert wird:

$$x^A = -a_0 + a_1 p \quad (a_0, a_1 > 0).$$

Diese enthält die bekannten Annahmen, daß bei steigendem Preis das Angebot (x^A) zunehmen wird und daß erst oberhalb eines bestimmten Preises (a_0) überhaupt ein Angebot erfolgt.

Die Differenz zwischen Angebot und Nachfrage erhalten wir durch

$$D = x^A - x$$

$$D = -a_0 + a_1 p - x.$$

Die Preisveränderung soll von dieser Differenz D abhängen, und zwar soll bei einer positiven Differenz, Angebot $>$ Nachfrage, der Preis im Zeitablauf fallen, bei einer negativen Differenz, Angebot $<$ Nachfrage, steigen. Dieses Verhalten können wir in folgender Differentialgleichung darstellen:

$$\dot{p} = -\gamma D$$

$$\dot{p} = -\gamma(-a_0 + a_1 p - x),$$

wobei γ ein Anpassungskoeffizient ist, der eine ähnliche Funktion wie ϵ hat. Je größer γ ist, um so schneller wird ein Punkt erreicht, wo $\dot{p} = 0$ ist.

Wir erhalten also insgesamt folgendes Differentialgleichungssystem:

$$\dot{x} = -1/\epsilon (x^3 - (y - y_0) - (p - p_0)x)$$

$$\dot{p} = -\gamma(-a_0 + a_1 p - x)$$

y exogen.

Eine Gleichgewichtslösung erhalten wir für

$$\dot{x} = 0$$

$$\dot{p} = 0,$$

wenn wir annehmen, daß y im Zeitablauf konstant ist.¹⁾

1) Also $\dot{y} = 0$.

Diese Bedingungen führen zu Polynomen 3. Grades, deren Lösungen mit elementaren, algebraischen Methoden nur schwer zu berechnen sind.¹⁾ Hier bietet sich an, numerische Methoden zur Lösung zu verwenden.

Die Simulation eines solchen Modells mit bekannten Integrationsmethoden, etwa dem Runge-Kutta-Verfahren, führt aber zu methodischen Problemen. Alle Methoden fordern als Voraussetzung, daß die Differentialgleichungen in den betrachteten Gebieten stetig sind, also z.B. keine Singularitäten aufweisen. Unser System ist aber gerade dadurch gekennzeichnet, daß an den Kuspenschwellen das Nachfrageverhalten nicht mehr stetig beschrieben wird, sondern durch Singularitäten der Form

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 0 \\ \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} &= 0.\end{aligned}$$

Diese Methoden sind also aufgrund der verletzten Voraussetzungen nicht anzuwenden.

Wir beschränken uns daher auf die graphische Darstellung, um auf diese Weise zu qualitativen Aussagen zu gelangen. Den Attraktor der Nachfragefunktion haben wir bereits in Abb. 5-3 dargestellt. Bei der Differentialgleichung für die Preisvariationen können wir ebenso vorgehen und die Punkte betrachten, wo $\dot{p} = 0$ ist. Das System strebt auf diese Punkte zu; die Menge der Punkte, die $\dot{p} = 0$ genügen, repräsentieren ebenfalls einen Attraktor.

1) Die Anwendung der Cardanischen Formel führt zu komplizierten Koeffizientenbündel, die ökonomisch nicht mehr interpretiert werden können.

Wir ermitteln:

$$x + d_0 - d_1 p = 0$$

als Attraktor für die Angebotsfunktion. Die Funktion ist unabhängig von y . Im 3-dimensionalen Raum stellen wir dies als Fläche dar, die für einen bestimmten Preis $\bar{p}$ einen Wert $\bar{x}$ annimmt, der für alle y gleich ist. Wir erhalten Abb. 5-4.

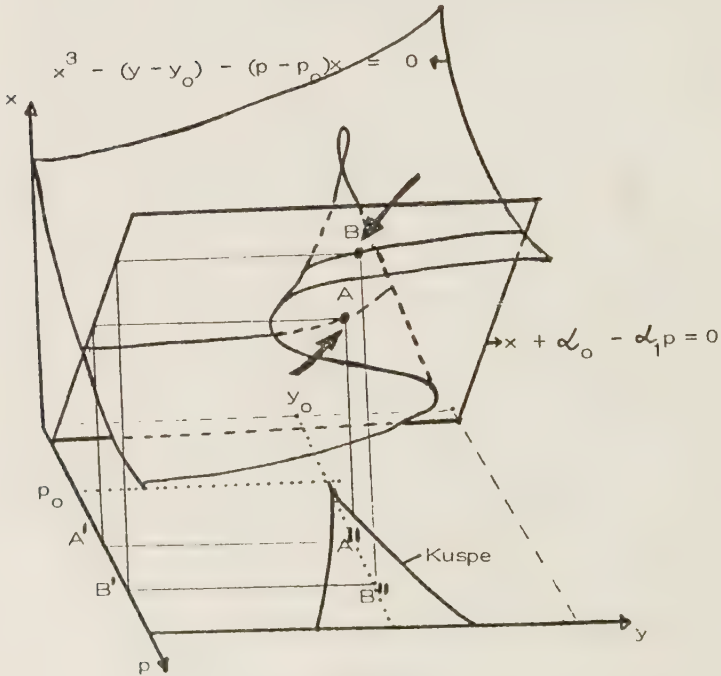


Abb. 5-4

Gehen wir von einem bestimmten Einkommen aus, bei dem die Nachfrage mehrwertig sein kann, etwa y_0 , so ergeben sich innerhalb der Kuppe zwei mögliche "Gleichgewichtspunkte". Also Punkte, bei denen keine Veränderungen der Parameter und Variablen mehr auftreten, solange keine externen Einflüsse auftreten. Welcher der beiden Punkte erreicht wird, hängt von den Parameterwerten der Vergangenheit ab.

Der Punkt A wird erreicht, wenn vorher relativ niedrige Nachfragewerte realisiert waren, während B "von oben" erreicht wird. Die Pfeile sollen diese Bewegungsrichtungen andeuten.

Zur Verdeutlichung wollen wir dieses Beispiel in der (p, x) -Ebene darstellen: ¹⁾

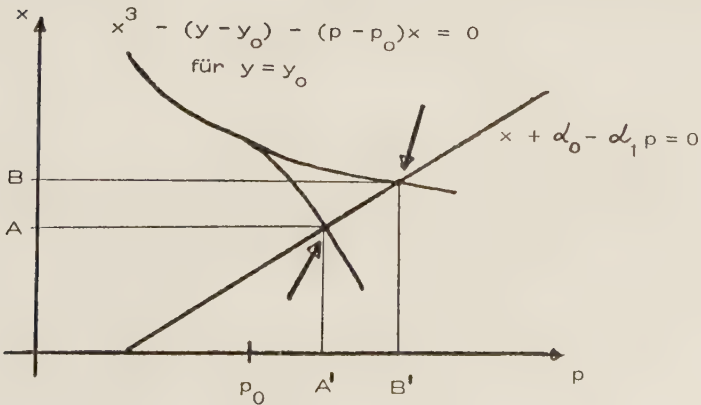


Abb. 5-5

1) Auf die Darstellung der Repellorfläche, die in Abb. 5-3 schraffiert ist, haben wir verzichtet, da dort keine Gleichgewichtspunkte erreicht werden.

Hier wird das Phänomen der Divergenz besonders deutlich. Obwohl nur ein Parameter von außen auf eine bestimmte Größe ($y = y_0$) gesetzt wird, sind zwei Lösungen möglich, die vom Systemzustand der Vergangenheit abhängen. A'A wäre damit ein Gleichgewicht, das "von unten" erreicht wird, und B'B das Gleichgewicht, auf welches das System "von oben" zustrebt.

Wir wollen nun zeigen, bei welchen Parameterkonstellationen plötzliche Veränderungen, also Katastrophen, möglich werden. Wenn wir annehmen, daß das Einkommen nicht mehr als Konstante vorgegeben ist, sondern im Zeitablauf ab- oder zunimmt¹⁾, so können, je nach Ausgangszustand, Katastrophen eintreten. Prinzipiell können wir uns das an Abb. 5-2 verdeutlichen; allerdings müssen wir zusätzlich die Wirkungen der Angebotsseite auf die Mengenkompente x beachten. In der (p, x) -Ebene können wir die Einkommensveränderungen als Kurvenverschiebungen darstellen.

1) Z.B. in der einfachen Form

$$\dot{y} = \omega y,$$

wobei ω die Wachstumsrate darstellt.

nehme auch die Bereitschaft ab, eine "erhöhte" Nachfrage aufrecht zu halten. Ab einem bestimmten Einkommen wird die Nachfrage sich plötzlich auf ein niedrigeres Niveau reduzieren.¹⁾

Unter der Annahme, daß unter sonst gleichen Bedingungen das Einkommen kontinuierlich abnimmt²⁾, verschiebe sich die Nachfragekurve bei einer Darstellung im zweidimensionalen Raum auf oben beschriebenem Weg. Dabei sinken Preis, Einkommen und Menge zunächst kontinuierlich; wenn wir annehmen, daß die Anpassungsprozesse relativ schnell auf die Schnittpunkte der Attraktoren führen. Die Entwicklung von $B_0^I B_0$ nach $B_1^I B_1$ wird sich auf diese Weise vollziehen; d.h. beim Rückgang des Einkommens von y_0 auf y_1 werden ebenfalls zurückgehen; der Preis von B_0^I auf B_1^I und die Menge von B_0 auf B_1 . Diese Rückgänge werden ohne "plötzliche Veränderungen" vor sich gehen, die durch betragsmäßig große Veränderungen in sehr kurzen Zeitintervallen charakterisiert sind.

Sinkt das Einkommen weiter, von y_1 auf y_2 , wird der Abstand zwischen "unterem" und "oberen" Ast so groß, daß schließlich der "obere" Ast bei y_2 keinen gemeinsamen Schnittpunkt mit der Angebotskurve mehr hat. Dieser Übergang führt zu einer plötzlichen Reduktion der Nachfrage und nach Abschluß der Anpassungsprozesse zu den Gleichgewichtswerten B_2 und B_2^I .

1) Entsprechend den oben gemachten Annahmen, siehe S. 73 ff.

2) In der Differentialgleichung der S. 84, Anm. 1, wählt man z.B. $\omega < 0$; $\omega = -0.05$ entspricht etwa einer "Wachstums"rate von -5% .

Beim Übergang von y_1 auf y_2 wird die Kuspenschwelle überschritten, die zu einer abrupten Verhaltensänderung, der Nachfragereduktion, führt. Würde die Kuspenschwelle bei diesem Einkommen noch nicht überschritten, könnte etwa ein Gleichgewicht bei $B_2^* B_2^*$ erreicht werden. Da aber die Kuspenschwelle überschritten wurde, tritt die Katastrophe ein: die Menge nimmt nicht nur um den "kleinen" Wert $B_1 B_2^*$ ab sondern zusätzlich um den "großen" Wert $B_2^* B_2^*$. Der Preis geht entsprechend zurück.

Ähnliche Betrachtungen lassen sich bei steigendem Einkommen anstellen.

Obwohl die zweidimensionalen Sektionen des betrachteten dreidimensionalen Raums nur einen groben Eindruck vermitteln, mußten wir darauf zurückgreifen, da die Projektion des $\mathbb{R}^3$ in die Ebene zu unübersichtlich wird, wenn wir zwei Flächen, in diesem Fall zwei Attraktoren, im $\mathbb{R}^3$ betrachten. ¹⁾

Dieses Marktmodell bezieht katastrophentheoretische Überlegungen in die Hypothesen über das Nachfrageverhalten ein. Wir möchten aber darauf hinweisen, daß für viele Güter die klassischen Nachfragehypothesen als konsistent angenommen werden können. Das katastrophentheoretische Modell stellt lediglich eine Ergänzung dar, das insbesondere bei Gütern anzuwenden sein wird, deren Konsum als Ausdruck eines hohen Lebensstandard angesehen wird. Die Motivation zu einem

1) Siehe etwa Abb. 5-4.

solchen Konsumverhalten basiert also auf den sozial-psychologischen Funktionen des Verbrauchs; denn der realisierte Lebensstandard, der sich im Konsumverhalten manifestiert, ist bedingt durch die Verhaltenserwartungen der sozialen Umwelt des Haushaltes.

Um zur makroökonomischen Nachfragefunktion zu gelangen, müssen wir die mikroökonomischen Nachfragefunktionen aggregieren. Wenn wir annehmen, daß nicht nur katastrophentheoretisch formulierte mikroökonomische Funktionen aggregiert werden sollen, sondern vornehmlich klassische Nachfragefunktionen vorliegen, so werden sprunghafte Veränderungen in der makroökonomischen Nachfragefunktion nicht auftreten. Aber eine wesentliche Eigenschaft katastrophentheoretischer Modelle, nämlich die Berücksichtigung von Parameterentwicklungen aus der Vergangenheit, die bei der oben formulierten Nachfragehypothese insbesondere zur Berücksichtigung der Einkommensentwicklung führte, kann bei der makroökonomischen Nachfragefunktion nicht vernachlässigt werden. Dies wird erreicht, in dem eine neue Variable eingeführt wird, z.B. das maximale Einkommen der Vergangenheit (Modigliani-Duesenberry) oder eine Lag-Variable des Konsums (Browns habit persistence-Hypothese)¹⁾, wobei letztere zu guten statistischen Schätzungen führt.²⁾

1) Der Lag-Variablen im Konsum entspricht unter gewissen Annahmen für die Lag-Verteilung und die Form der Konsum-Einkommens-Beziehung die Berücksichtigung aller Einkommen der Vergangenheit.

2) Vgl. Stöwe, Ökonometrie und makroökonomische Theorie, a.a.O., S. 100 ff.

Neben den Auswirkungen individueller Nutzeninterdependenzen, wie sie unter anderem in der habit persistence-Hypothese zum Ausdruck kommen, werden in der Nachfragetheorie auch andere Auswirkungen diskutiert, nämlich Nachfrageinterdependenzen, die sich im bandwagon- oder snob-Effekt äußern.¹⁾ Hierbei wird die Haushaltsnachfrage als zusätzlich abhängig von der Gesamtnachfrage nach einem bestimmten Gut innerhalb einer Volkswirtschaft betrachtet. Die theoretische Analyse erklärt diese Effekte durch Kurvenverschiebungen im zweidimensionalen Raum.²⁾ Es ist jedoch leicht möglich, diese Effekte in einfachen katastrophentheoretischen Kuspensmodellen zu veranschaulichen.

Der bandwagon-Effekt (Mitläufereffekt) beschreibt den Nachfrageanstieg eines Haushalts, d.h. seine Nachfrage steigt bei steigender Gesamtnachfrage. Eine steigende Gesamtnachfrage N für ein Gut kann bei einem Haushalt zur Vermutung führen, daß der Konsum zur Repräsentation eines bestimmten, angestrebten Status vonnöten ist. Wird diese Vermutung durch Verhaltenserwartungen des sozialen Umfeldes gestützt, wird der Haushalt bei Überschreiten einer Gesamtnachfrage von N_2 die Nachfrage nach diesem Gut plötzlich ausweiten. Beispiele aus den letzten Jahren sind die Nachfrage nach Farbfernsehgeräten, Spülmaschinen, Einfamilienhäuser, hochwertige Nahrungs- und Genussmittel. Umgekehrt ist bei sinkender Gesamtnachfrage

1) Vgl. Luckenbach, a.a.O., S. 103 ff.

2) Vgl. ebenda, S. 104 ff.

eine plötzliche Nachfragereduktion zu beobachten, die durch entsprechende Substitution in statusverbessernde Güter ausgeglichen wird.

Betrachten wir als zweiten Parameter zur Bestimmung des Nachfrageverhaltens wieder den Preis und nehmen wir eine normale Reaktion an, so suchen wir eine Funktion:

$$f(N, p; x),$$

die das Verhalten des Mitläufereffektes, wie wir ihn oben dargestellt haben, beschreibt. Wie im ersten Fall handelt es sich um eine Funktion in einer Variablen und zwei Parametern. Wenn wir wieder die Voraussetzungen des Klassifikationstheorems als gegeben annehmen, also vor allem, daß f eine glatte, generische Funktion ist, so gilt, daß nur die zwei Elementarkatastrophen Falte und Kusppe möglich sind. Die kritische Menge ist dann der Lösungsmenge der Gleichung

$$x^3 - (N - N_0) - (p - p_0)x = 0$$

äquivalent, wobei im Punkt (N_0, p_0) die Kusppeäste beginnen. Die Funktion können wir in bekannter Weise darstellen:

Formulieren wir in diesem Modell zusätzliche Hypothesen für Preis und Gesamtnachfrage, müssen wir beachten, daß die Nachfragefunktion für ein Wirtschaftssubjekt aufgestellt wurde. Beide Parameter werden durch Veränderungen der nachgefragten Menge nur geringfügig beeinflußt, wenn auf dem betrachteten Markt sehr viele Nachfrager auftreten. Nehmen wir dies an, können wir sowohl p als auch N als unabhängig von x ansehen.

Betrachten wir folgendes Beispiel: bei einem gegebenem Preis p_1 steige die Gesamtnachfrage N dieses Gutes (siehe Pfeil in Abb. 5-7), dann wird sich die individuelle Nachfrage nur geringfügig verändern, bis die Gesamtnachfrage die Kuspenschwelle bei A' überschreitet; dort erhöht sich die Nachfrage unseres Wirtschaftssubjektes sprunghaft auf den Wert A . Da wir diese Nachfrage (x) als unabhängig von der Gesamtnachfrage (N) ansehen, vernachlässigen wir im ersten Schritt den Effekt der individuellen Nachfrageausweitung auf die Gesamtnachfrage. Bei einer partialanalytischen Betrachtung, wie wir sie hier vornehmen, führt dies nicht zu einem so großen Fehler, daß das Ergebnis unserer Analyse als falsch anzusehen wäre.

Bei einer Totalanalyse kann dieser Effekt aber nicht vernachlässigt werden, vor allem, wenn wir davon ausgehen, daß die Nutzenerwartungen bei vielen Haushalten ähnlich sind und sich damit ähnliche Kuspengrenzen ergeben können. Weitert sich etwa die Gesamtnachfrage aufgrund plötzlicher Nachfrageausweitungen bei mehreren Wirtschaftssubjekten bis zum Punkt B' , können zusätzliche Effekte nicht außer acht gelassen

werden. Ist die Angebotsfunktion nicht vollkommen unelastisch, werden bei normalen Reaktionen der Anbieter die Preise aufgrund des Nachfrageüberschusses steigen. Diese Preissteigerungen werden die individuellen Nachfragemengen aller Wirtschaftssubjekte absinken lassen, d.h. auch die Gesamtnachfrage wird sich verringern. Der Rückgang könnte zu Punkt C in der Abb. 5-7 führen. Die nachgefragte Menge hat dort zwar geringfügig gegenüber B abgenommen, hat aber ein höheres Niveau als vor der Nachfrageausweitung.

Ähnliche Überlegungen lassen sich zum snob-Effekt anstellen. Er beschreibt die Reduktion der Nachfrage bei steigender Gesamtnachfrage, wobei als Grund meist der Wunsch nach Differenzierung angesehen wird.¹⁾ Auch hier läßt sich ein entsprechendes katastrophentheoretisches Modell aufstellen. Die Form der Abbildung entspricht dem Spiegelbild der Abb. 5-7.

Für die makroökonomische Konsumfunktion sind beide Effekte von untergeordneter Bedeutung, da sie individuelles Nachfrageverhalten für ein Gut erklären, die damit einhergehenden

1) Vgl. Luckenbach, a.a.O., S. 106 f.

Substitutionseffekte aber außer acht lassen.

Für die mikroökonomische Nachfragetheorie sind weitere Modellformulierungen mit Hilfe der Katastrophentheorie möglich, wobei als Normalfaktor vornehmlich Gütereigenschaften eingesetzt werden können, denen ein statusfördernder Wert zugeordnet wird. Die beabsichtigte Wirkung von Werbeaktivitäten zielt ja gerade auf die Verbindung von Gut und statusfördernder Gütereigenschaft, um damit eine schnelle Nachfrageausweitung zu erreichen. Auf eine weitergehende Betrachtung kann hier verzichtet werden, da man analog zu den oben beschriebenen Beispielen vorgehen kann.

(523) Katastrophentheoretische Modelle zum Verhandlungs-

prozeß der Lohnfindung

Die ökonomische Theorie bietet mehrere Erklärungsmodelle des Verhandlungsprozesses von Gewerkschaften und Arbeitgeberverbänden zur Lohnfindung an; am bekanntesten dürften die bargaining-Theorien von Zeuthen, Pen, Nash und Hicks sein.¹⁾ Bei den spieltheoretischen Ansätzen wird die Dynamik

1) Vgl. den Überblick und den Versuch einer Klassifizierung der einzelnen Theorien bei Bartmann, Zur Theorie der Lohnbildung in makroökonomischen Modellen, Göttingen 1971, S. 58 ff und die dort angegebenen Literaturhinweise.

des Prozesses durch die Strategien und Präferenzen der Verhandlungsparteien verdeckt, zudem müssen jeder Partei alle eigenen und fremden Strategien bei Spielbeginn bekannt sein, was ebenfalls nicht realistisch ist. Andere formalisierte, statische und dynamische Theorien bedienen sich stetigen Verhaltensfunktionen und sind damit nicht geeignet, plötzliche Verhaltensänderungen im Laufe des Verhandlungsprozesses, insbesondere das Einschwenken auf eine Kompromißhaltung, zu erklären.¹⁾

Zeeman²⁾ skizziert folgendes Modell des bargaining-Prozesses mit Hilfe der Schmetterlingskatastrophe. Zeeman betrachtet allerdings nicht die Verhandlungen zwischen Tarifparteien, sondern stellt sein Modell auf die Lohnvereinbarungen einer einzelnen Firma mit ihren Beschäftigten ab. Die Verhaltensvariable ist der Prozentsatz, der die individuellen Meinungen wiedergibt, um welche Größe der Lohnsatz steigen sollte. Die Beschäftigten werden durch viele Punkte im Verhaltensraum repräsentiert. Die interne Dynamik, durch welche die Punkte sich annähern, wird durch die Kommunikation zwischen den Beschäftigten erreicht. Dennoch werden aufgrund unterschiedlicher sozialer Umweltbedingungen bei verschiedenen

1) Eine rein verbale Analyse des Verhandlungsprozesses, die auch nicht-ökonomische Faktoren ausführlich würdigt, findet sich z.B. in: Himmelmann, Lohnbildung durch Kollektivverhandlungen, Berlin 1971, S. 124 ff.

2) Vgl. Zeeman, Applications ... , a.a.O., S. 22.

Gruppen (different pressure on different groups) die Meinungen der Gruppen eine Tendenz zur Divergenz zeigen, d.h. die Meinungen polarisieren sich. Um diese Polarisierung katastrophentheoretisch zu erklären, verwendet Zeeman die Schmetterlingskatastrophe ¹⁾ mit folgenden vier Kontrollparametern:

$$\text{Konfliktfaktoren} \left\{ \begin{array}{l} = \text{Einvernehmen über die Löhne} \\ = \text{Einvernehmen über die} \\ \quad \text{Unternehmensgewinne} \end{array} \right.$$

$$\text{Verzerrungsfaktor} = \text{Position im Unternehmen} \\ \text{(vom Manager zum Arbeiter)}$$

$$\text{Schmetterlingsfaktor} = \text{Zeit, } t.$$

Die Dynamik des Modells wird durch den Schmetterlingsfaktor Zeit erreicht. Wie bereits erwähnt, werden die Individuen durch Punktwolken auf der Oberfläche M repräsentiert, die sich im Zeitablauf gleichmäßig bewegen. Für $t \leq 0$ stellt die Kuspenskatastrophe die Polarisation der Meinungen zwischen dem Managerangebot und der Forderung der Arbeitnehmer dar. Dabei ist zu beachten, daß sich an der Spitze der Kuppe die Leute befinden, die sich keiner Meinung anschließen, weil sie sich an den Verhandlungen nicht beteiligen. An jedem Ende des Verzerrungsfaktors finden sich die beiden extremen Meinungen.

1) Siehe oben S. 31 ff.

Für $t > 0$ entsteht eine "Kompromißtasche" zwischen den beiden extremen Meinungen. Mit zunehmender Zeit vergrößert sich diese Tasche und weitere Individuen "fallen" in die Tasche, m.a.W. die Erfahrungen der Katastrophe, oder eine Änderung der Lageeinschätzung, führen von einer extremen Meinung zu einem Kompromißverhalten. Wenn die Tasche soweit gewachsen ist, daß genügend viele Individuen von ihr umgeben sind, ist der Verhandlungsprozeß beendet.

Dieses Modell läßt sich ohne Schwierigkeiten auf Verhandlungen zwischen Tarifpartnern übertragen; einige Modifikationen erscheinen aber angebracht. Während die Definitionen der Konfliktfaktoren entsprechend dem o.a. Modell vorgenommen werden können, ist der Verzerrungsfaktor neu zu bestimmen. Als Verzerrungsfaktor sehen wir die wirtschaftliche Situation des Bereichs an, dem die Verhandlungspartner angehören. Indikatoren dieser Situation sind unter anderem die Gewinn-situation und die Auftragslage der Unternehmen, der Beschäftigungsstand und die erreichte tarifliche Absicherung anderer Leistungen (Gratifikationen, Urlaub usw.) der Beschäftigten. Eine gute Gewinnsituation der Unternehmen stärke die Verhandlungsposition der Gewerkschaften, während ein niedriger Beschäftigungsstand ihre Position schwäche. Mit der Zeit als Schmetterlingsfaktor läßt sich der Verhandlungsablauf in diesem Modell wie folgt erklären: Ausgangspunkt sind die divergierenden Meinungen der Verhandlungspartner, Gewerkschaften und Arbeitgeberverbände, über die zu fixierenden Lohnsätze, wobei die Verhandlungsposition zusätzlich durch die wirtschaftliche Situation bestimmt

wird. Mit fort dauernden Verhandlungen ($t > 0$) weitet sich die "Kompromißtasche" und die Positionen der Verhandlungspartner nähern sich einem von beiden Seiten zu tretenden Ergebnis.

Die katastrophentheoretische Formulierung der Modelle orientiert sich an der Polarisierung der Meinungen beider Verhandlungspartner im Ausgangspunkt. Diese Situation ist jedoch kein Charakteristikum von Lohnverhandlungen. Daß divergierende Meinungen durch Verhandlungen angeglichen werden sollen, ist letztlich Ziel jeder Verhandlung. Die Erklärung dieser Ausgleichsfunktion (Zunahme der Kompromißbereitschaft) durch einen aufwendigen Formalapparat, wie ihn die Katastrophentheorie zur Verfügung stellt, erscheint uns nicht sinnvoll, weshalb wir auch darauf verzichtet haben.¹⁾ Die Frage, welche Faktoren die Öffnung der "Kompromißtasche" bedingen, wird nicht beantwortet, da als Schmetterlingsfaktor die Zeit eingesetzt wird. Die Zeit ist aber nicht bestimmend für die Angleichung von Meinungen, vielmehr bedarf es dazu sachlicher Argumente und einem ganzen Bündel von sozialen und psychologischen Einflußfaktoren, die nur unvollständig beschrieben werden können.²⁾

Da vor allem ökonomische Faktoren bei der Modellkonstruktion

1) Die algebraische Formulierung führt auch aufgrund der fehlenden Quantifizierbarkeit der Parameter zu keinen weiteren Erkenntnissen.

2) Vgl. Himmelmann, a.a.O., S. 124 ff; vor allem S. 135 ff.

weitgehend außer acht gelassen wurden, sind die Modelle zur Lohnfindung, die katastrophentheoretisch formuliert wurden, keine wesentlichen Beiträge zur Wirtschaftstheorie.

(524) Makroökonomische Verhaltenshypothesen und

Katastrophentheorie

Makroökonomische Verhaltenshypothesen können auf verschiedene Weise zustandekommen ¹⁾; durch Analogiebetrachtungen zu mikroökonomischen Relationen oder durch ökonomische Überlegungen auf makroökonomischer Ebene. Bei beiden Vorgehensweisen werden bedeutende Probleme vernachlässigt, insbesondere die Beziehungen zwischen den Mikro- und Makroparametern. Diese Beziehungen können etwa durch Aggregation der Mikrobeziehungen zu Makrobeziehungen hergeleitet werden. ²⁾

Wenn wir mikroökonomische Verhaltensannahmen, denen katastrophentheoretische Modelle zugrunde liegen, zur Beschreibung wirtschaftlicher Phänomene als brauchbar ansehen, so muß sich die dort auftretende plötzliche Verhaltensänderung nicht in der gesamtwirtschaftlichen Reaktion fortsetzen; wir haben dies bereits bei der Betrachtung der mikroökonomischen

1) Vgl. Stöwe, Ökonometrie, a.a.O., S. 68 ff.

2) Vgl. zu dieser Problematik die ausführlichen Darlegungen von Stöwe, Ökonometrie, a.a.O., S. 71 ff.

Einkommenskonsumfunktion erörtert. In der Regel müssen wir vielmehr davon ausgehen, daß plötzliche Änderungen im individuellen Verhalten sich auf die globale Betrachtung, die in der Makroökonomie vorherrscht, eine so geringe Auswirkung haben, daß wir sie vernachlässigen können. Lediglich bei gleichzeitigen, plötzlichen Verhaltensänderungen von sehr vielen Wirtschaftssubjekten haben diese auch Auswirkungen auf die makroökonomischen Relationen. Dabei ist aber weiter zu bedenken, daß korrespondierende Effekte zu diesen abrupten Verhaltensänderungen in partialanalytischen Modellen nicht berücksichtigt werden, etwa die Substitutionseffekte beim bandwagon- und snob-Effekt. Diese Gründe lassen katastrophentheoretische Modelle ungeeignet erscheinen für makroökonomische Verhaltensannahmen, hinter denen eine Vielzahl von individuellen Entscheidungen stehen.

Betrachten wir aber Verhalten, die von wenigen Wirtschaftssubjekten bestimmt werden, etwa die möglichen Verhaltensweisen wirtschaftspolitischer Instanzen, so ist hier eine katastrophentheoretische Formulierung möglich. Beispiele zur Erklärung solcher wirtschaftlicher Phänomene sind Verhandlungsmodelle, in denen Entscheidungen über wirtschaftspolitische Parameter getroffen werden. Analog zu den Modellen zur Lohnfindung lassen sich solche aufstellen für Entscheidungen über fiskal- oder geldpolitische Aktionsparameter. Wegen der fundamentalen, negativen Kritik an allen Verhandlungsmodellen ¹⁾ wollen wir hier darauf verzichten.

1) Siehe oben und Kapitel (6).

(53) Stabilitätsbetrachtungen in komperativ-statischen

Modellen ¹⁾

Samuelson ²⁾ vertritt die These, daß alle komperativ-statischen Theoreme der traditionellen ökonomischen Gleichgewichtstheorie abgeleitet sind von folgenden Fundamentalthypothesen:

- (a) daß Gleichgewichtspositionen als reguläre Maxima oder Minima von Kriterienfunktionen, wie Nutzen, Gewinn, Wohlfahrt oder Kosten, betrachtet werden können;
- (b) daß Gleichgewichtspositionen (dynamisch) stabil sind;
- (c) daß qualitative Informationen dem Wirtschaftswissenschaftler zur Verfügung stehen, die das Gleichgewicht charakterisieren, etwa Vorzeichen bestimmter Matrizen.

Die erste Hypothese ist insbesondere wichtig für die komperativ-statische Analyse der "Individualökonomie", z.B. bei einzelnen Haushalten oder Firmen, hat jedoch geringe

-
- 1) Vgl. Markus, Catastrophes of Economic Equilibria, in: Russell (ed.), Calculus of Variations and Control Theory, New York, San Francisco, London 1976, S. 73 - 91. Eine ähnliche Darstellung, die auf der Debreuschen Werttheorie aufbaut und wohlfahrtstheoretische Aspekte berücksichtigt, findet sich in: Balasko, Économie et Théorie des Catastrophes, in: Cahiers du Séminaire d'Économetrie 19 (1977), S. 105 - 120; ders., Economic Equilibrium and Catastrophe Theory: An Introduction, Econometrica 46 (1978), S. 557 - 569.
- 2) Vgl. Samuelson, Foundations of Economic Analysis, Havard University Press 1955; hier nach Markus, a.a.O., S. 82.

Bedeutung bei der Analyse von Modellen, die Beziehungen zwischen Aggregaten einbeziehen, also bei der makro-ökonomischen Theorie oder der allgemeinen Gleichgewichtstheorie.

Die zweite Hypothese bezieht sich vornehmlich auf die dynamische Stabilität eines Gleichgewichts für gegebene Bedingungen und weniger auf den Vergleich zweier benachbarter Umgebungen, etwa zweier statischer Gleichgewichte. Sie ist damit nicht ganz mit dem komperativ-statischen Ansatz vereinbar. Dennoch kann ein ökonomischer Anpassungsprozeß, etwa Walras Tâtonnement-Prozeß, nach einer Linearisierung durch ein Differentialgleichungssystem beschrieben werden. Die Untersuchung der Eigenwerte der Systemmatrix lassen dann Aussagen über das Stabilitätsverhalten zu; für ein stabiles Gleichgewicht muß die Systemmatrix negative Eigenwerte haben.

Dynamische Stabilität und komperativ-statische Gleichgewichte wurden von Samuelson im "Korrespondenzprinzip" verbunden, d.h. korrespondierend zu stabilen Gleichgewichtspositionen eines ökonomischen Modells hat es, zumindest bei angemessenen ökonomischen Hypothesen, komperativ-statische Existenzeigenschaften. Mit Hilfe der Katastrophentheorie sind wir in der Lage, bei einer komperativ-statischen Analyse Gebiete aufzuzeigen, in denen das Gleichgewicht nicht dynamisch stabil ist.

Wir betrachten ein ökonomisches Modell mit folgenden

(endogenen) Variablen

$$x^1, x^2, \dots, x^n$$

und Kontrollparametern (exogenen Variablen)

$$a^1, a^2, \dots, a^k.$$

Der Zustand des Modells ist ein Punkt $x \in \mathbb{R}^n$, wobei die Bedingungen des Modells durch den Punkt $a \in \mathbb{R}^k$ spezifiziert werden.

$$F_1(x, a), F_2(x, a), \dots, F_n(x, a)$$

seien n reelle differenzierbare Funktionen, die das Modell beschreiben für jeden Zustand $x \in \mathbb{R}^n$ und den Bedingungen $a \in \mathbb{R}^k$.

Eine Gleichgewichtsposition ist definiert durch den Zustand x_0 und einer Bedingung a_0 , für die gilt

$$F_1(x_0, a_0) = 0, \dots, F_n(x_0, a_0) = 0.$$

Wenn z.B. $F_i(x, a)$ die aggregierte Überschußnachfrage im i -ten Markt einer klassischen Konkurrenzgesellschaft darstellt, wo die Zustände durch den Marktpreis repräsentiert werden sollen, tritt ein Gleichgewicht ein, wenn gilt

$$F_i(x, a) = 0 \quad \text{für alle } i = 1, \dots, n.$$

Die komperativ-statische Analyse untersucht die qualitative Natur einer Veränderung Δx , d.h. der Zustand verändert sich von x_0 zu $x_1 = x_0 + \Delta x$, die eintritt aufgrund einer Verschiebung der Bedingungen von a_0 zu $a_1 = a_0 + \Delta a$, wobei angenommen wird, daß das neue Gleichgewicht in x_1 für die Bedingungen a_1 erreicht wird.

Im besonderen nehmen wir an, daß komperativ-statische Informationen verfügbar sind, wenn die Vorzeichen $(+, -, 0)$ eines oder mehrerer Elemente des Vektors Δx bestimmt werden können und zwar durch Ausdrücke der bekannten Vorzeichen aus den Matrizelementen

$$A = \left(\frac{\partial F_i(x_0, a_0)}{\partial x^j} \right) = (F_{ij})$$

und

$$B = \left(\frac{\partial F_i(x_0, a_0)}{\partial a^l} \right) = (F_{la}^i).$$

Also betrachten wir lokale, qualitative Informationen auf dem Tangentenraum zur k -Mannigfaltigkeit

$$x = x(a),$$

die implizit definiert ist im $\mathbb{R}^{n+k}$ durch die n Bedingungen

$$F_i(x, a) = 0 \quad (i = 1, \dots, n)$$

unter der Annahme, daß die Jakobische Matrix A nicht singulär ist.

Entlang der Gleichgewichtsmannigfaltigkeit

$$x = x(a)$$

berechnen wir

$$F_{ij} \frac{\partial x^j}{\partial a^i} + F_{ia} = 0$$

$$\frac{\partial x^j}{\partial a^i} = -A^{-1}B.$$

Damit reduziert sich das Problem der komparativen Statik auf die Bestimmung der Vorzeichen der Matrixelemente

$A^{-1}B$ in Ausdrücken der Vorzeichen¹⁾ von A und B an jedem Punkt der Gleichgewichtsmannigfaltigkeit.

Zur Vorzeichenbestimmung sind nun brauchbare ökonomische Hypothesen hinzuziehen, worauf Samuelson in den Foundations hingewiesen hat.²⁾

Eine Hypothese, welche qualitative Informationen des Vorzeichens von A^{-1} impliziert, ist die Metzler-Bedingung³⁾,

1) Ein Vektor (oder eine Matrix) z erfüllt $z > 0$,

wenn alle Elemente $z^i > 0$;

ebenso $z \geq 0$, wenn $z^i \geq 0$ aber $z \neq 0$.

2) Vgl. oben S. 101 f.

3) Vgl. Quirk, Saposnik, Introduction to General Equilibrium Theory and Welfare Economics, New York, St. Louis ... 1968, S. 166 und S. 211.

die wie folgt definiert ist:

Eine reelle $(n \times n)$ -Matrix $A = (a_{ij})$ erfüllt die Metzler-Bedingung, wenn die nicht-diagonalen Terme nicht negativ sind, d.h.

$$a_{ij} \geq 0 \quad \text{für } i \neq j.$$

Die Matrix A erfüllt streng die Metzler-Bedingung, wenn

$$a_{ij} > 0 \quad \text{für } i \neq j$$

und

$$a_{ii} < 0 \quad \text{für } i = 1, \dots, n.$$

Die Metzler-Bedingung bezieht sich auf die ökonomischen Annahmen der Substitution. Betrachten wir die $F_i(x, a)$ als aggregierte Überschußnachfrage des i -ten Konkurrenzmarktes mit dem Preis x^i für jede Bedingung a .

Nach der Metzler-Bedingung gilt nun:

$$a_{ii} = \frac{\partial F_i}{\partial x^i} < 0,$$

d.h. die Nachfrage nach dem i -ten Gut sinkt, wenn dessen Preis steigt (klassische Annahme unter Vernachlässigung des Giffenparadoxons). Ebenso gilt:

$$a_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial x^j} > 0 \quad \text{für } i \neq j,$$

d.h. die Nachfrage nach dem i -ten Gut steigt, wenn der Preis für ein Substitutionsgut x^j steigt.

Für Metzler-Matrizen gilt nun folgender Satz:

"Sei A eine Metzler-Matrix; dann ist A eine Stabilitätsmatrix, wenn und nur wenn

$$A^{-1} \leq 0.$$

Ebenso, wenn A eine strenge Metzler-Matrix ist, gilt

$$A^{-1} < 0."^{1)}$$

Aber auch bei Verwendung von Metzler-Matrizen sind kooperativ-statische Modelle möglich, die dynamisiert zu mehrwertigen Attraktoren führen und an deren Grenzen plötzliche Wertänderungen (Katastrophen) auftreten. Betrachten wir dazu folgendes Beispiel:

Wir wollen kooperativ-statisch das Verhalten eines Einprodukt-unternehmens in einer Konkurrenzgesellschaft untersuchen, das als Ziel Gewinnmaximierung verfolgen soll. Sei y die Ausbringung des Produktes in Stück, p der Preis per Stück und x^i die Einheiten der beteiligten Produktionsfaktoren, die zu Kosten w_i per Einheit beschafft werden.

1) Markus, a.a.O., S. 84; Beweis S. 84 f.

Gegeben sei die differenzierbare Produktionsfunktion

$$y = f(x^1, \dots, x^n)$$

$$\text{mit } \frac{\partial f}{\partial x^i} > 0.$$

Die Gewinnfunktion ergibt sich als

$$\begin{aligned}\pi &= py - \sum_{i=1}^n w_i x^i \\ &= pf(x^1, \dots, x^n) - \sum_{i=1}^n w_i x^i.\end{aligned}$$

Bezeichnen wir die ökonomischen Bedingungen, die von dem Unternehmen nicht variiert werden können¹⁾, durch den Parameter

$$a = (p, w_1, \dots, w_n) > 0,$$

können wir die Katastrophentheorie zur Analyse der kritischen Punkte $\pi(x, a)$ verwenden.

Das Unternehmen wird den Input wählen, der $\pi(x, a)$ maximiert. Die Gleichgewichtsbedingungen, die eine Gewinnmaximierung charakterisieren, sind gegeben durch:

$$(1) \quad \frac{\partial \pi}{\partial x^i} = pf_i(x) - w_i = 0$$

$$\text{für } i = 1, \dots, n$$

und

1) Hier die Annahmen der vollkommenen Konkurrenz auf den Beschaffungsmärkten und dem Absatzmarkt.

$$(2) \left(\frac{\partial^2 \pi^2}{\partial x^i \partial x^j} \right) = (p f_{ij}(x))$$

ist negativ definit.

Wir betrachten nun eine generische Gewinnfunktion $\pi(x, a)$, wobei der Parameter a für p oder ein w_k steht.

Weiter nehmen wir an:

$$A = \left(\frac{\partial^2 \pi^2}{\partial x^i \partial x^j} \right) \quad \text{erfülle die strenge Metzler-Bedingung}$$

und

$$B = \left(\frac{\partial^2 \pi^2}{\partial x^i \partial a} \right) > 0$$

überall auf der kritischen Mannigfaltigkeit

$M_\pi \subset \mathbb{R}^{n+1}$, die durch

$$\frac{\partial \pi}{\partial x^i} = 0 \quad \text{für } i = 1, \dots, n$$

definiert ist.

Wenn $\pi(x, a)$ diese Form hat, verkürzen sich die Annahmen zu

$f_{ij}(x)$ erfülle die strengen Metzler-Bedingungen

und

$$f_i(x) > 0.$$

Die erste Bedingung verweist auf die Substitutionshypothese und die zweite hängt von der konkaven Produktionsfunktion $f(x)$ ab.

Auf dem offenen Unterbogen $M_{\pi}^- \subset M_{\pi}$, wo A negativ definit ist, erhalten wir als Ergebnis der komparativen Statik

$$\frac{\partial \pi}{\partial a} = -A^{-1}B > 0.$$

Für unsere Gewinnfunktion heißt das:

$$\frac{\partial x^i}{\partial p} > 0 \quad \text{für } i = 1, \dots, n$$

oder, wenn nur $a = w_k$ in $\frac{\partial \pi}{\partial x^k}$ eingeht, erhalten wir auf M_{π}^-

$$\frac{\partial x^k}{\partial w^k} < 0.$$

Verwenden wir aber die Geometrie der Kurve

$$M_{\pi} \subset \mathbb{R}^{n+1},$$

so können wir unter generischen Bedingungen schließen, daß

$$\frac{\partial x^k}{\partial w^k} > 0$$

In einigen offenen Bögen von M_{π} ist, die gemeinsame Grenzpunkte $\{K\}$ mit den Bögen von M_{π}^- haben.

Daraus folgt, daß $\Delta = \det A$ an jedem Grenzpunkt das Vorzeichen wechselt¹⁾, also Katastrophen im Sinne der Katastrophentheorie eintreten.

Bei kleinen Dimensionen muß dieses Phänomen allerdings nicht auftreten. Für $n = 2$ sind z.B. alle 1-Minoren von A negativ, so daß hier eine komperativ-statische Analyse möglich ist.

1) Wenn $(\Delta_{11} \Delta_{22} \dots \Delta_{nn}) \neq 0$.

(6) Kritische Würdigung

"Katastrophentheorie" bezeichnet sowohl eine mathematische Disziplin, die bestimmte Singularitäten von glatten Abbildungen beschreibt, als auch die Anwendung dieser Theoreme für viele wissenschaftliche Probleme anderer Fachrichtungen, etwa für Linguistik, Psychologie, Biologie, Soziologie, Physik, Ingenieurwesen. Dabei wurden diese Anwendungen hoch gelobt:

- " - "The most important development since calculus" (Newsweek);
- "Affords novel and deep insights in the world in which we live" (New Scientist);
- "The Promised Land may be in sight at last" (Science)."¹⁾

Sussmann und Zahler haben die Anwendungen in den Sozialwissenschaften (Psychologie, Soziologie, Wirtschaftswissenschaften) und der Biologie kritisch untersucht und kommen zu dem Schluß, daß die Katastrophentheoretiker

- die mathematischen Grundlagen in einer Weise mißbraucht haben, die zu unhaltbaren Beweisen führen;
- Modelle vorstellen, die auf unvernünftigen Annahmen basieren und die zu unglaublichen Schlußfolgerungen führen;

1) Nach Sussmann, Zahler, a.a.O., S. 117.

- Voraussagen machen, die häufig leer, tautologisch oder vage sind oder sich nicht experimentell überprüfen lassen.¹⁾

Diese Behauptungen werden von Sussmann und Zahler an den bekanntesten Anwendungen der Kuspenkatastrophe verdeutlicht. Wir wollen hier zunächst die Kritik am Modell des Börsenmarktes ausführlich darstellen.²⁾

Das generelle Muster zur Bildung von Kuspenmodellen für die (Sozial-)Wissenschaften, wie es von Zeeman und seinen Mitarbeitern angewandt wird, charakterisieren Sussmann und Zahler wie folgt:³⁾

Schritt 1: Auswahl von 3 Variablen,
etwa C, F, J im Börsenmodell.

Schritt 2: Annahme einer Funktion $f(C, F, J)$, die das Verhalten beschreibt nach der Regel:
für jedes C, F nimmt J einen Wert an, der die Funktion f minimiert. Für mehrere lokale Minima wird dann die Verzögerungsregel angewandt, so daß zusätzliche Informationen über die "Vergangenheit des Systems" benötigt werden

1) Vgl. Sussmann, Zahler, a.a.O., S. 118.

2) Zur Kritik von Aggressions-, Kriegs-, Herzschlag- und Nervenimpulsmodellen vgl. Sussmann, Zahler, a.a.O.. Eine kurze Kritik des Kriegs- und Börsenmodells findet sich in: Sussmann, Catastrophe Theory: A Preliminary Critical Study, a.a.O..

3) Vgl. Sussmann, Zahler, a.a.O., S. 153 ff.

und der Übergang von einem lokalen Minimum zu einem anderen als plötzliche Verhaltensänderung (= Katastrophe) erscheint.

Schritt 3: Einige "vernünftige", qualitative Annahmen über f werden gemacht, vor allem f sei glatt und generisch, die als "technische, aber harmlose mathematische Annahmen" bezeichnet werden.¹⁾

Schritt 4: Aus diesen Annahmen folgt dann nach Thoms Klassifikationstheorem, daß die kritische Menge von f einer Kuspenoberfläche²⁾ äquivalent ist.

Diese Vorgehensweise findet sich auch bei der Beschreibung des Börsenmarktmodells durch Zeeman; wir haben in der Einführung, vor allem aus Verständnisgründen, die mathematische Seite (Schritt 3 und 4) vernachlässigt. Zu beachten ist aber, daß die Einführung der Hypothese, f sei glatt und generisch, als rein technischer Aspekt betrachtet wird und die damit verbundenen Implikationen nicht diskutiert werden. Schritt 4 folgt dann zwangsläufig mit dem Hinweis, daß es sich um tiefe mathematische Einsichten handelt.³⁾

Die Annahme, daß f generisch sei, ist unter "technischen" Gesichtspunkten wichtig, damit Thoms Klassifikationstheorem überhaupt angewandt werden kann. Das Konzept der "Generizität" ist entwickelt für Eigenschaften von Eigenschaften, nicht für Eigenschaften von individuellen Objekten⁴⁾, und seine

1) Vgl. Isnard, Zeeman, a.a.O., S. 56.

2) Sussmann, Zahler bezeichnen so die kritische Menge $C(f)$; also die Fläche im $\mathbb{R}^3$, die sich über der Kuppe ausbreitet.

3) Vgl. Zeeman, On the Unstable Behavior of Stock Exchange, a.a.O., S. 44 f; Isnard, Zeeman, a.a.O., S. 74.

Anwendung auf eine einzelne Funktion ist nicht sinnvoll, ja kann zu absurden Ergebnissen führen.¹⁾

Betrachten wir ein beliebiges Ereignis, etwa, daß Ich gestern um 8 Uhr aufgestanden bin. Nun sei T die Zeit, zu der ich gestern aufgestanden bin. Unter Anwendung des Generizitätskonzepts können wir annehmen, daß T nicht 8 Uhr ist; denn die Eigenschaft " $T \neq 8 \text{ Uhr}$ " ist generisch, ja sogar für jede beliebige Zeit T' erhalten wir eine generische Eigenschaft " $T \neq T'$ ". Damit ist die Annahme gerechtfertigt, daß Ich gestern überhaupt nicht aufgestanden bin.²⁾

Ebenso wie der "mathematische Beweis", daß nichts passiert, kann mit dem Generizitätskonzept auch das Gegenteil bewiesen werden, wenn man es falsch anwendet.³⁾

Das Konzept der Generizität ist in den Anwendungen der Katastrophentheorie oft falsch benutzt worden, nämlich als Eigenschaft individueller Objekte, auch von (dem Mathematiker) Zeeman. Wir haben hier die Vorgehensweise zur Konstruktion katastrophentheoretischer Modelle übernommen, weisen aber auf die Gefahr hin, mathematische Konzepte zu verwenden, die das Ergebnis verfälschen können.

1) Vgl. Sussmann, Zahler, a.a.O., S. 185 f.

2) Das Beispiel ist entnommen: Sussmann, Zahler, a.a.O., S. 186 f; dort finden sich weitere Beispiele für die falsche Anwendung des Generizitätskonzepts.

3) Vgl. ebenda, S. 187 ff.

Im Börsenmarktmodell wendet Zeeman das Generizitätskonzept auf die Verhaltensfunktion an, die er vorher durch plausible Verhaltensannahmen der Fundamentalisten und Chartisten erklärt hat. Daraus folgt dann die Kuspel. Aber nach den obigen Ausführungen könnten auch ganz andere Verhaltensannahmen nach Anwendung des Generizitätskonzepts zu einer Kuspel führen. Das Modell basiert also letztlich nicht auf den gemachten Annahmen sondern auf dem Generizitätskonzept. Damit ist aber eine solche Anwendung nicht zur Erklärung der Realität geeignet.

Neben dieser erheblichen Einschränkung der Anwendung des Klassifikationstheorems sei noch erwähnt, daß die formulierten Verhaltenshypothesen nicht unbedingt zu einem Modell mit einer einzigen Kuspel führen. Das wird vielmehr von Zeeman im Börsenmarktmodell implizit angenommen. Außerdem sind die Hypothesen so formuliert, daß man zu einer Oberfläche S , die das Marktverhalten charakterisieren soll, auch ohne Anwendung tiefer mathematischer Einsichten (gemeint ist die Anwendung des Klassifikationstheorems von Thom) kommt.¹⁾

Den Schlußfolgerungen aus dem Börsenmarktmodell, die Zeeman zieht, wollen wir eine anschließen, die Zeeman nicht erwähnt. Der einzige Mechanismus, der zu einem Kurszusammenbruch führen kann, ist der Verkauf von Aktien durch die Fundamentalisten; daraus folgt, ein rein spekulativer Markt kann in diesem Modell nicht zusammenbrechen! So eine

1) Vgl. Sussmann, Catastrophe Theory: A Preliminary Critical Study, a.a.O., S. 28.

Schlußfolgerung verletzt sowohl die theoretische Vermutung, daß gerade spekulative Märkte am ehesten zusammenbrechen, als auch die empirische Evidenz, die zeigt, daß rein spekulative Märkte existieren und zusammenbrechen.¹⁾

Diese Einwände gegen das Börsenmarktmodell lassen es zur Erklärung und Voraussage als ungeeignet erscheinen. Die politische Empfehlung, die Zeeman aus diesem Modell ableitet, nämlich eine zeitlich begrenzte, hohe Steuer auf den Aktienverkauf zu erheben, um einen Zusammenbruch nach einer Hausse zu vermeiden²⁾, mag für das Modell geeignet sein, aber die Voraussagen aus diesem Modell müssen nicht der Realität entsprechen.

Die Kritik, die wir für das Börsenmarktmodell dargelegt haben, gilt auch für die wirtschaftswissenschaftlichen Modelle, die wir katastrophentheoretisch formuliert haben, da auch hier implizit die Annahme einer (!) glatten und generischen Verhaltensfunktion zugrundeliegt.

Auch bei der Untersuchung des Stabilitätsverhaltens von komperativ-statischen Modellen werden die Möglichkeiten von Katastrophen durch generische Bedingungen für die Geometrie der Kurve $M_{\pi\pi}$ eingeführt. Diese ist abgeleitet aus einer (!) generischen Gewinnfunktion. Hier kann aber die Anwendung des Generizitätskonzepts zu falschen Schlußfolgerungen führen, so

1) Vgl. Sussmann, Catastrophe Theory: A Preliminary Critical Study, a.a.O., S. 26.

2) Vgl. Zeeman, On the Unstable Behavior of Stock Exchange, a.a.O., S. 48. Eine Quantifizierung des Modells oder der Steuerhöhe und -dauer wurde nicht vorgenommen.

daß die Ergebnisse der Analyse keinen allgemeingültigen Charakter haben. Daß die Stabilität komparativ-statischer Modelle von den einzelnen Funktionen des Modells abhängt und darüber erst Aussagen getroffen werden können, wenn diese Funktionen explizit, und nicht implizit, formuliert sind, ist aber auch ohne katastrophentheoretische Formulierung bekannt. Die Erklärung dieser bekannten Phänomene durch eine komplizierte mathematische Theorie kann also nicht als wissenschaftliche Leistung angesehen werden.

Nachdem wir die von uns als möglich angesehenen Anwendungen der Katastrophentheorie in den Wirtschaftswissenschaften kritisch gewürdigt haben, meinen wir, daß neue wissenschaftliche Erkenntnisse hierdurch nicht möglich werden.

Es bleibt zu fragen, warum die Anwendungen der Katastrophentheorie in den letzten Jahren so euphorisch von vielen Seiten begrüßt worden sind?

Sussmann und Zahler ¹⁾ führen den Erfolg auf die Faszination der "Masse" zurück, die diese gegenüber der Mathematik empfinden. Sie zitieren etwa folgende Passage aus Newsweek:

"Um die Katastrophentheorie anwenden zu können, wählt der Mathematiker zuerst die Variablen aus, die für das

1) Vgl. Sussmann, Zahler, a.a.O., S. 206.

Problem relevant sind - diese können "Wachstum" und "Inflation" in einer bestimmten ökonomischen Umgebung sein. Er stellt dann sovieler statistische und verhaltensmäßige Daten wie möglich zusammen und wird sich klar über die äußeren Faktoren, die das ökonomische Klima beeinflussen können. Schließlich formt der Mathematiker unter Zuhilfenahme sehr komplexer Mathematik und eines Computers ein qualitatives und quantitatives Modell, daß, wenn es geeignet formuliert ist, präzise Voraussagen über das Verhalten machen kann, die, wie Zeeman sagt, allen Voraussagen weit überlegen sind, die mit den besten, bisher bekannten, statistischen Techniken erzielt werden können." ¹⁾

Solche nebulösen Artikel stellen den Mathematiker als Zauberer dar, der mit statistischen Daten und Computern mysteriöse Handlungen vollzieht und dann die Zukunft "präzise" voraussagen kann. Allerdings ist bisher kein katastrophentheoretisches Modell bekannt, daß quantitative Voraussagen liefert. In den Sozialwissenschaften sind die Modelle in der Regel nicht einmal numerisch formuliert, so daß weder ein Erklärungs- noch ein Vorhersagemodell existiert.

Die mathematischen Theorien (Whitney Topologie, Generizität, Entfaltungen usw.), auf denen die Katastrophentheorie basiert, sind für die meisten Nichtmathematiker unbekannt, aber die Ergebnisse, etwa ein Kuspensmodell, sind ohne weiteres verständlich. Das Hinterfragen der Anwendung der mathematischen

1) Newsweek, January 19, 1976, S. 54 f; zitiert nach Sussmann, Zahler, a.a.O., S. 206.

Theorien wird aber dann vernachlässigt.¹⁾

Daß die Katastrophentheorie in den Sozialwissenschaften so starkes Interesse findet, mag auch daran liegen, "daß der Gebrauch des mathematischen Apparates eine wissenschaftliche Autorität verleiht, welche die sozialwissenschaftliche Theorie allein nicht bieten kann"²⁾.

Die meisten Anwendungen der Katastrophentheorie in anderen Wissenschaften wurden von Mathematikern formuliert, die an den Anwendungen selbst vielleicht gar nicht so interessiert sind, sondern vielmehr daran, die Mathematik der Singularitäten in die Phänomene zu zwingen, anstatt sie zu erklären.³⁾

Die Behauptung, daß die Behandlung diskontinuierlichen Verhaltens erst durch die Katastrophentheorie möglich wird, vernachlässigt weite Teile der Mathematik, wie Quantenmechanik, Bifurkationstheorie, Schockwellentheorie oder einfach Schwellen (thresholds).⁴⁾ Allerdings sind diese

1) Vgl. Sussmann, Zahler, a.a.O., S. 207 f; Kolata, Catastrophe Theory: The Emperor Has No Clothes, in: Science 196 (1977), S. 287 ff, S. 350.

2) Rosenhead, Prison "Catastrophe", in: New Scientist 71 (1976), S. 140.

3) Vgl. Sussmann, Catastrophe Theory: A Preliminary Critical Study, a.a.O., S. 31.

4) Vgl. ebenda, S. 30; Kolata, a.a.O., S. 287.

Theorien mathematisch nicht so interessant wie die Katastrophentheorie; aber warum eine komplexere Theorie anwenden, wenn einfachere verfügbar sind?

Eine Beschreibung der überaus komplexen Realität von ökonomischen, sozialen und politischen Phänomenen mit Hilfe eines "einfachen" mathematischen Modells, wie das der Kuspe, ignoriert ganze Generationen von Sozialwissenschaftler, die sich mit diesen Problemen intellektuell auseinandergesetzt haben.

(7) Zusammenfassung

Nach einem einführenden Beispiel wurden die mathematischen Grundlagen der Katastrophentheorie kurz skizziert. Dem Überblick über die wichtigsten, in der Literatur veröffentlichten Anwendungen aus den Sozialwissenschaften schließt sich die Diskussion möglicher Anwendungen in den Wirtschaftswissenschaften an. Nachdem die mathematischen Implikationen, wie lokales Minimierungsverhalten (Verzögerungsregel), Divergenz, nicht von vornherein eine Anwendung in der Ökonomie ausschlossen, betrachteten wir Modelle individuellen Nachfrageverhaltens und des Verhandlungsprozesses zur Lohnfindung. Eine Anwendung für makroökonomische Fragestellungen wurde aus ökonomischen Gründen als nicht sinnvoll erachtet.

In einer kritischen Würdigung kamen wir zu dem Schluß, daß die komplexen, mathematischen Theorien in der Literatur falsch angewandt wurden, um katastrophentheoretische Modelle zu formulieren. Weil auch die in Kapitel (5) beschriebenen katastrophentheoretischen Modelle der Wirtschaftswissenschaften in Analogie an die Vorgehensweise der Literatur entwickelt wurden, trifft diese Kritik auch auf diese Modelle zu.

Eine Überprüfung katastrophentheoretisch formulierter Modelle an empirischen Daten wurde bisher nicht vorgenommen. Die Modelle werden meist nur als Erklärungsmodelle formuliert, die eher qualitativen Charakter haben. In der Regel sind

die Modelle nicht numerisch spezifiziert.

Die Beschreibung sprunghafter Veränderungen durch die Katastrophentheorie ist zwar eine mathematisch anspruchsvolle Methode, jedoch haben die von uns betrachteten wirtschaftstheoretischen Modelle nicht zu wesentlichen, neuen wissenschaftlichen Einsichten in die Ökonomie geführt. Die fundamentale Kritik an der falschen Anwendung mathematischer Theoreme bei der Modellformulierung erlauben zudem keine Aussagen, die als wissenschaftlich gesichert angesehen werden können. Beim heutigen Stand der mathematischen Disziplin "Katastrophentheorie" werden Anwendungen in der Wirtschaftstheorie nicht zu substantiell neuen Erkenntnissen führen.

Literaturverzeichnis

- Y. Balasko Économie et Théorie des Catastrophes,
in:
Cahiers du Séminaire d'Économetrie
19 (1977), S. 105 - 120
- ders. Economic Equilibrium and Catastrophe
Theory: An Introduction,
in:
Econometrica 46 (1978), S. 557 - 569
- H. Bartmann Zur Theorie der Lohnbildung in
makroökonomischen Modellen,
Göttingen 1971
- H. Benke, R. Remmert, H.-G. Steiner, H. Tietz (Hrsg.)
Fischer Lexikon Mathematik,
2 Bände, Frankfurt 1964/66
- A.R. Bergstrom, C.R. Wymer, A Model of Disequilibrium
Neoclassical Growth and its Applications
to the United Kingdom,
in:
A.R. Bergstrom (ed.),
Statistical Inference in Continuous Time
Economic Models,
Amsterdam, Oxford 1976
(North-Holland Publishing Co.)
- J. Callahan Singularities and Plane Maps,
in:
The American Mathematical Monthly
81 (1974), S. 211 - 240

- M. Golubitsky, V. Guillemin, Stable Mappings and their Singularities,
New York 1973 (Springer Verlag)
- W. Güttinger Catastrophe Theory in Physics and Biology,
In:
M. Conrad, W. Güttinger, M. Dal Cin (ed.),
Physics and Mathematics of the Nervous System,
Proceedings of a Summer School Organized by the International Centre for Theoretical Physics, Trieste, and the Institute for Information Sciences, University of Tübingen, held at Trieste, August 21 - 31, 1973,
Berlin, Heidelberg, New York 1974 (Springer-Verlag, Lecture Notes in Biomathematics 4),
S. 2 - 30
- G. Himmelmann Lohnbildung durch Kollektivverhandlungen,
Berlin 1971
- P. Hilton (ed.) Structural Stability, the Theory of Catastrophes, and Applications in the Sciences,
Proceedings of the Conference Held at Battelle Seattle Research Center 1975,
Berlin, Heidelberg, New York 1976 (Springer-Verlag, Lecture Notes in Mathematics 525)
- H. Hochgesand Zur Theorie der Devisenspekulation - Eine entscheidungstheoretische Analyse -,
Diss. Mainz 1972

- C.A. Isnard, E.C. Zeeman, Some Models from Catastrophe
Theory in the Social Sciences,
In:
L. Collins (ed.),
The Use of Models In the Social
Sciences,
London 1976 (Tavistock),
S. 44 - 100
- H.-J. Jarchow Theorie und Politik des Geldes,
I. Geldtheorie,
Göttingen 1973
- G.B. Kolata Catastrophe Theory: The Emperor
Has No Clothes,
In:
Science 196 (1977), S. 287, 350 - 351
- Yung-Chen Lu Singularity Theory and an Introduction
to Catastrophe Theory,
New York, Heidelberg, Berlin 1976
(Springer-Verlag)
- H. Luckenbach Theorie des Haushaltes,
Göttingen 1975
- A. Manning (ed.) Dynamical Systems - Warwick 1974,
Proceedings of a Symposium Held at
the University of Warwick 1973/74,
Berlin, Heidelberg, New York 1975
(Springer-Verlag, Lecture Notes in
Mathematics 468)

- L. Markus Catastrophes of Economic Equilibria,
in:
D.L. Russel (ed.),
Calculus of Variations and Control
Theory,
Proceedings of a Symposium Conducted
by the Mathematics Research Center,
The University of Wisconsin - Madison
1975,
New York, San Francisco, London
1976 (Academic Press),
S. 73 - 91
- J.N. Mather Right Equivalence,
Warwick University 1965 (Preprint)
- J. Quick, R. Sasposnik, Introduction to General Equilibrium
Theory and Welfare Economics,
New York, St. Louis, San Francisco,
Toronto, London, Sydney 1968
(McGraw-Hill)
- F. Reinhardt, H. Soeder, dtv-Atlas zur Mathematik,
Band 1 und 2, München 1974/77
- J. Rosenhead Prison "Catastrophe",
in:
New Scientist 71 (1976), S. 140
- P. Samuelson Foundations of Economic Analysis,
Harvard University Press 1955
- H. Schwegler, W. Bächtli, Die Katastrophentheorie (Mathematische
Modelle für Grenzsituationen),
in:
Bild der Wissenschaft, 15, Heft 11
(November 1978), S. 130 - 140

- H. Stöwe Ökonometrie und makroökonomische
Theorie,
Stuttgart 1959
- ders. Ökonometrie,
Meisenheim am Glan 1977
- H.J. Sussmann Catastrophe Theory,
In:
Synthese 31 (1975), S. 229 - 270
- ders. Catastrophe Theory: A Preliminary
Critical Study,
vorgestellt auf: 1976 Biennial Meeting of
the Philosophy of Science Association
in Chicago, Oct. 1976
(erscheint in den Veröffentlichungen
dieser Tagung)
- ders., R.S. Zahler Catastrophe Theory as Applied to the
Social and Biological Sciences: A
Critique,
In:
Synthese 31 (1978), S. 117 - 216
- R. Thom Structural Stability and Morphogenesis,
An Outline of a General Theory of Models,
Reading, Massachusetts 1975 (Benjamin),
aus dem Französischen von D.F. Fowler
- D'A.W. Thompson On Growth and Form,
Cambridge University Press 1917
- A.E.R. Woodstock, T. Poston, A Geometrical Study of
Elementary Catastrophes,
Berlin, Heidelberg, New York 1974
(Springer-Verlag, Lecture Notes in
Mathematics 373)

- E.C. Zeeman Differential Equations for the Heartbeat
and the Nerve Impulse,
in:
M.M. Peixoto (ed.),
Dynamical Systems,
Proceedings of a Symposium Held at the
University of Bahia, Savador, Brasil,
July 26 - August 14, 1971,
New York, London 1973 (Academic Press),
S. 683 - 741
- ders. On the Unstable Behavior of Stock
Exchange,
In:
Journal of Mathematical Economics
1 (1974), S. 39 - 49
- ders. Levels of Structure in Catastrophe Theory,
Illustrated by Applications in the Social
and Biological Sciences,
in:
Proceedings of the International Congress
of Mathematics, Vancouver 1974,
Vol. 2, S. 533 - 546
- ders. The Classification of Elementary
Catastrophes of Codimension ≤ 5 ,
in:
Hilton (ed.), a.a.O., S. 263 - 326
- ders. Brain Modelling,
in:
Hilton (ed.), a.a.O., S. 367 - 372
- ders. Prison Disturbances,
in:
Hilton (ed.), a.a.O., S. 402 - 408

- E.C. Zeeman Applications of Catastrophe Theory,
in:
A. Hattori (ed.),
Manifolds - Tokyo 1973,
Proceedings of the International Conference on Manifolds and Related
Topics in Topology, Tokyo 1973,
Tokyo 1975 (University of Tokyo Press),
S. 11 - 23
- ders. Catastrophe Theory,
in:
Scientific American 243 (1976),
S. 65 - 83
- ders., C.S. Hall, P.J. Harrison, G.H. Marriage, P.H. Shapland
A Model for Institutional Disturbances,
in:
British Journal of Mathematical and
Statistical Psychology 26 (1976),
S. 66 - 80
- Eine Zusammenfassung der Schriften Zeemans wurde 1977
veröffentlicht:
- E.C. Zeeman Catastrophe Theory, Selected Papers,
1972 - 1977,
Reading, Massachusetts 1977
(Addison-Wesley Publishing)

Lebenslauf

Am 21. Februar 1949 wurde ich als Sohn von Karl Wieth und dessen Frau Henriette in Neuwied geboren.

Die Volksschule besuchte ich seit April 1955 und wechselte 1959 zur Realschule, die ich 1965 erfolgreich abschloß. Nach einer kaufmännischen Lehre in der Stahlindustrie und eineinhalbjähriger Tätigkeit als Programmierer begann ich im Oktober 1970 das Studium der Betriebswirtschaftslehre an der Fachhochschule Rheinland-Pfalz, Abt. Mainz II. Nach der Graduierung 1973 arbeitete ich dort als Assistent in der Fachrichtung Wirtschaftsinformatik und studierte gleichzeitig an der Johannes Gutenberg-Universität in Mainz Volkswirtschaftslehre. 1976 bestand ich das Examen als Diplom-Volkswirt. Im Februar 1977 trat ich als wissenschaftlicher Mitarbeiter in das Rechenzentrum der Universität Mainz ein. Seit Oktober 1978 arbeite ich als EDV-Revisor in der pharmazeutischen Industrie. Außerdem nehme ich Lehraufträge an der Fachhochschule Mainz und der Universität Mainz mit Schwerpunkten in Organisation und EDV wahr. Die mündliche Doktorprüfung bestand ich am 19. Juni 1979.

Mainz, 20. Juni 1979

Druck: Reinartz

Copier- und Offset-Center

Gaustraße 16, Telefon 061 31/9 3870 + Kirschgarten 3, Telefon 061 31/9 6202
6500 Mainz

